Revista Ceres 40(228): 176-195. 1993

TESTE PARA VERIFICAR A IDENTIDADE DE MODELOS DE REGRESSÃO E A IGUALDADE DE ALGUNS PARÂMETROS NUM MODELO POLINOMIAL ORTOGONAL[1/]

Adair José Regazzi [2/]

1. INTRODUÇÃO

A análise de regressão é uma técnica potencialmente útil na análise de dados, tendo grande aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento.

Com muita freqüência, estuda-se a relação funcional entre as variáveis Y e X. Alguns problemas têm aplicações importantes, como determinar se um conjunto de curvas são paralelas, determinar se um conjunto de curvas têm um intercepto comum ou determinar se um conjunto de curvas são idênticas, por exemplo: ao estudar H diferentes situações experimentais e assumir um modelo linear para cada situação, um pesquisador pode estar interessado em determinar se os H modelos são idênticos ou querer determinar se alguns dos parâmetros do modelo são os mesmos de modelo para modelo. Em muitos casos, o interesse maior está em saber se um conjunto de equações pode ser representado por uma equação comum.

Neste trabalho, foi considerado o ajustamento de H equações de regressão polinomial de grau k, mediante o emprego da técnica dos polinômios ortogonais, com o objetivo de apresentar um método para testar as seguintes hipóteses: a) H_0: as H equações são idênticas, b) H_0: as H equações têm uma constante de regressão comum e c) H_0: as H equações têm alguns coeficientes de regressão iguais.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nota sobre a comparação de parâmetros, em equações de regressão linear simples, foi apresentada por BROWN (*1*), que cita, como exemplo, um estudo sobre curvas de sobrevivência de células, em função da quantidade de radiação, em diferentes condições, feito por Pike e Alper.

[1/] Aceito para publicação em 26.03.1992

[2/] Departamento de Informática da UFV. 36570-000 Viçosa, MG.

NETER e WASSERMAN (*6*) testaram se duas equações de regressão linear simples eram idênticas utilizando o teste F. Os pesquisadores comentaram que o teste pode ser aplicado para verificar a igualdade de duas equações de regressão polinomial ou de duas equações de regressão múltipla, desde que sejam feitas as modificações adequadas, e, ainda, que o teste pode ser estendido, em caso de três ou mais equações. Eles mostraram, também, exemplos de comparação de parâmetros de equações de regressão.

GRAYBILL (*3*) apresentou um método para testar a hipótese de igualdade de um conjunto de modelos lineares, empregando o teste F. Como exemplo, citou o uso de fertilizantes em determinada cultura, onde se usa certo número de variedades e, para cada uma, obtém-se a relação entre a produção e a quantidade de fertilizante aplicada, mediante equações de regressão. Nesse caso, pode-se determinar se o aumento na produção, por unidade de fertilizante, é o mesmo para todas as variedades ou se a produção de cada variedade é a mesma na ausência de fertilizantes. Testes para verificar essas hipóteses foram apresentados.

SWAMY e MEHTA (*9*) mostraram que, combinando informações de duas equações de regressão, é possível obter estimadores mais eficientes do que as estimativas baseadas em cada uma isoladamente.

STEEL e TORRIE (*8*) apresentaram testes para verificar a igualdade entre dois coeficientes de regressão e, também, a igualdade entre mais de dois coeficientes de regressão num modelo de regressão linear simples.

3. METODOLOGIA E RESULTADOS

3.1. *Modelo estatístico completo*

Considere-se, inicialmente, o ajustamento dos dados de observação relativos a H equações de regressão polinomial do segundo grau, mediante o emprego da técnica dos polinômios ortogonais. As H equações são dadas por:

$$
\begin{aligned}
Y_{1i} &= a_1 + b_1 P_{11i} + c_1 P_{21i} + e_{1i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n_1 \\
Y_{2i} &= a_2 + b_2 P_{12i} + c_2 P_{22i} + e_{2i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n_2 \\
&\vdots \\
Y_{Hi} &= a_H + b_H P_{1Hi} + C_H P_{2Hi} + e_{Hi}, \quad i = 1, 2, \ldots, n_H
\end{aligned}
\qquad (\alpha.1)
$$

em que

Y_{hi} é a i-ésima observação do h-ésimo modelo, sendo $i = 1, 2, \ldots, n_h$ é o número de observações, e $h = 1, 2, \ldots, H$ o número de modelos;

a_h, b_h e c_h são os parâmetros do h-ésimo modelo;

P_{khi} é um polinômio de grau k, correspondente ao i-ésimo valor da variável independente do h-ésimo modelo;

e_{hi} é o erro aleatório, associado a i-ésima observação do h-ésimo modelo, sendo supostos independentes e normalmente distribuídos, com média zero e variância comum σ^2, isto é, $e_{hi} \sim NID\,(0, \sigma^2)$;

$$\sum_{h=1}^{H} n_h = N \text{ e } n_h > 3 \text{ para todo h.}$$

As hipóteses que serão consideradas são as seguintes:

1. H_o: $\underset{\sim}{\beta}_1 = \underset{\sim}{\beta}_2 = \dots = \underset{\sim}{\beta}_H$, isto é, as H equações são idênticas;

em que

$$\underset{\sim}{\beta}_h = \begin{bmatrix} a_h \\ b_h \\ c_h \end{bmatrix}$$

2. H_o: $a_1 = a_2 = \dots = a_H$, isto é, as H equações têm uma constante de regressão comum (no modelo ortogonal, tem-se que $\hat{a}_h = \overline{Y}_h$).

3. H_o: $c_1 = c_2 = \dots = c_H$, isto é, as H equações têm os coeficientes de regressão do termo de segundo grau iguais, ou H_o: $b_1 = b_2 = \dots = b_H$ e $c_1 = c_2 = \dots = c_H$, isto é, os coeficientes de regressão dos termos de primeiro e segundo graus são iguais. α.2)

O h-ésimo modelo em (α.1) pode ser escrito como

$$\underset{\sim}{Y}_h = X_h \underset{\sim}{\beta}_h + \underset{\sim}{\varepsilon}_h \qquad (\alpha.3)$$

em que

$$\underset{\sim}{Y}_h = \begin{bmatrix} Y_{h1} \\ Y_{h2} \\ \vdots \\ Y_{hn_h} \end{bmatrix}_{n_h \times 1}, \quad X_h = \begin{bmatrix} 1 & P_{1h1} & P_{2h1} \\ 1 & P_{1h2} & P_{2h2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & P_{1hn_h} & P_{2hn_h} \end{bmatrix}_{n_h \times p}, \quad \underset{\sim}{\beta}_h = \begin{bmatrix} a_h \\ b_h \\ c_h \end{bmatrix}_{p \times 1}, \quad \underset{\sim}{\varepsilon}_h = \begin{bmatrix} e_{h1} \\ e_{h2} \\ \vdots \\ e_{hn_h} \end{bmatrix}_{n_h \times 1} \qquad (\alpha.4)$$

Escrevendo esses H modelos na forma do modelo linear geral $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$, tem-se que:

$$\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{Y}_1 \\ \underset{\sim}{Y}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{Y}_H \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & X_2 & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & X_H \end{bmatrix}_{N \times Hp}, \quad \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\beta}_1 \\ \underset{\sim}{\beta}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\beta}_H \end{bmatrix}_{Hp \times 1}, \quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_1 \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_H \end{bmatrix}_{N \times 1} \qquad (\alpha.5)$$

Evidentemente, $\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N(\underset{\sim}{\emptyset}, \sigma^2 I)$. O sistema de equações normais, obtido pelo método dos mínimos quadrados, é $X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{Y}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} X_1'X_1 & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & X_2'X_2 & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & X_H'X_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\beta}}_1 \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'\underset{\sim}{Y}_1 \\ X_2'\underset{\sim}{Y}_2 \\ \vdots \\ X_H'\underset{\sim}{Y}_H \end{bmatrix}$$

Sendo a matriz X'X não-singular, o estimador do vetor de parâmetros tem a seguinte impressão:

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{Y} \qquad (\alpha.6)$$

e ainda, sendo a matriz $(X'X)^{-1}$ bloco diagonal, onde cada bloco é a matriz inversa $(X'_hX_h)^{-1}$ de cada modelo, tem-se que (α.6) pode ser escrito do seguinte modo:

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\beta}}_1 \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_1'X_1)^{-1}X_1'\underset{\sim}{Y}_1 \\ (X_2'X_2)^{-1}X_2'\underset{\sim}{Y}_2 \\ \vdots \\ (X_H'X_H)^{-1}X_H'\underset{\sim}{Y}_H \end{bmatrix} \qquad (\alpha.7)$$

Neste trabalho, adotou-se um modelo ortogonal, em que as condições de ortogonalidade são

$$\text{i)}\ \sum_{i=1}^{n_h} P_{khi} = 0, \qquad k = 1, 2 \quad h = 1, 2, \ldots, H$$

$$\text{ii)}\ \sum_{\substack{i=1 \\ k \neq e}}^{n_h} P_{khi} P_{ehi} = 0, \qquad k = 1, 2 \quad e = 1, 2$$

k e e são os graus do polinômio adotado. Tem-se que a matriz X'X é diagonal, conseqüentemente $(X'_h X_h)^{-1}$, para todo h, também é diagonal, portanto, de fácil inversão.

3.2. *Análise de variância relativa ao modelo completo*

Generalizando, considere-se o ajustamento de H modelos de regressão polinomial de grau k.

A soma de quadrados de parâmetros relativa ao modelo completo (α.5) é dada por

$$SQPAR(c) = \underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{Y} = \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{\beta}'_h X'_h \underset{\sim}{Y}_h \qquad (\alpha.8)$$

com Hp (H modelos, cada um com p parâmetros) graus de liberdade.

A soma de quadrados total não-corrigida é dada por

$$SQTOT(c) = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} = \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{Y}'_h \underset{\sim}{Y}_h \qquad (\alpha.9)$$

com N graus de liberdade.

A soma de quadrados do resíduo é obtida pela diferença entre (α.9) e (α8), em que:

$$\begin{aligned} SQRES(c) &= \underset{\sim}{Y}'\,[I - X(X'X)^{-1}X']\,\underset{\sim}{Y} \\ &= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{Y} \\ &= \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{Y}'_h \underset{\sim}{Y}_h - \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{\beta}'_h X'_h \underset{\sim}{Y}_h \\ &= \sum_{h=1}^{H} (\underset{\sim}{Y}'_h \underset{\sim}{Y}_h - \underset{\sim}{\beta}' X'_h \underset{\sim}{Y}_h) \\ &= \sum_{h=1}^{H} SQRES(h) \end{aligned} \qquad (\alpha.10)$$

com N - Hp graus de liberdade, e

$$SQRES(h) = \underset{\sim}{Y}'_h \underset{\sim}{Y}_h - \underset{\sim}{\beta}'_h X'_h \underset{\sim}{Y}_h$$

com n_h - p graus de liberdade, é a soma de quadrados do resíduo relativo ao h-ésimo modelo, isto é, correspondente à análise de variância da regressão para a h-ésima equação.

O esquema da análise da variância relativa ao modelo completo está apresentado no Quadro 1.

QUADRO 1 – Esquema da análise de variância relativa ao modelo completo

Causas da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.*
Parâmetros ($\underset{\sim}{\beta}$)	Hp	$\underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{Y}$	
Resíduo	N - Hp	$\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{Y}$	QMR = $\hat{\sigma}^2$
Total	N	$\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y}$	

$$* \ \hat{\sigma}^2 = \frac{\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}}{N - Hp} = \frac{\sum_{h=1}^{H} SQRES(h)}{N - Hp}$$

Na realidade, $\hat{\sigma}^2$ é o estimador comum da variância residual, que pode ser obtido pela média ponderada dos estimadores das variâncias residuais de cada modelo.

Uma vez que o modelo pressupõe homocedasticidade e a violação dessa pressuposição, em casos extremos, pode levar a erros graves nas conclusões, sua verificação poderá ser feita mediante um dos testes de homogeneidade de variâncias, como, por exemplo, o teste de Bartlett, citado por LI (*4*). Com base nos trabalhos de CONAGIN *et alii (2)* e NAGAI *et alii (5)*, verifica-se que, dentro de certos limites, a heterogeneidade de variâncias não é assim um fator tão limitante. Por outro lado, conforme se verifica em PIMENTEL-GOMES (*7*), quando se tem uma relação de variâncias menor que sete é quase sempre possível combinar as variâncias residuais, obtendo-se uma estimativa comum. Esse fato pode ser estendido para o problema em questão e, quando esse quociente for além de sete, convirá considerar separadamente subgrupos de modelos, onde se tenha, dentro de cada subgrupo, uma razoável homogeneidade de variâncias.

3.3. *Testes estatísticos*

Neste item, é apresentado o método, com o esquema de análise, para o teste das três hipóteses formuladas em (α.2).

3.3.1. *Teste para verificar a igualdade de um conjunto de equações de regressão*

Sob a hipótese de nulidade,

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_H$ (as H equações são idênticas), os modelos em (α.1) reduzem-se à forma

$$Y_{hi} = a + bP_{1hi} + cP_{2hi} + e_{hi} \qquad (\alpha.11)$$

em que Y_{hi}, P_{khi} e e_{hi} têm as mesmas especificações dos modelos em (α.1); a, b e c são os parâmetros comuns.

Utilizando a notação matricial, os modelos reduzidos (α.11) podem ser escritos como

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{Z}\underset{\sim}{\theta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad (\alpha.12)$$

em que

$\underset{\sim}{Y}$: é o vetor dos valores observados da variável dependente, de dimensão N x 1, igual a (α.5);

$$Z = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_H \end{bmatrix}_{N \; p}$$, onde X_h com h = 1, 2, ..., H, é igual a (α.4);

$$\underset{\sim}{\theta} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{p \; 1}$$, é o vetor dos parâmetros comuns

$\underset{\sim}{\varepsilon}$: é o vetor de erros aleatórios, de dimensão N x 1, igual a (α.5)

O sistema de equações normais relativo ao modelo reduzido (α.12), obtido pelo método dos mínimos quadrados, é $Z'Z\hat{\theta} = Z'\underset{\sim}{Y}$, isto é,

$$\left[\sum_{h=1}^{H} X_h'X_h\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \left[\sum_{j=1}^{H} X_j'\underset{\sim}{Y}_j\right] \qquad (\alpha.13)$$

Sendo a matriz Z'Z de dimensão p x p e não-singular, o estimador do vetor de parâmetros comuns tem a seguinte expressão:

$$\hat{\underset{\sim}{\theta}} = (Z'Z)^{-1}Z'\underset{\sim}{Y} \qquad (\alpha.14)$$

Sendo a matriz Z'Z composta pela soma das matrizes X'_hX_h de cada modelo, bem como a matriz $Z'\underset{\sim}{Y}$, o estimador do vetor dos parâmetros comuns pode ser escrito do seguindo modo:

$$\underset{\sim}{\hat{\theta}} = \left(\sum_{h=1}^{H} X_h'X_h\right)^{-1} \sum_{j=1}^{H} X_j'Y_j \qquad (\alpha.15)$$

A soma de quadrados de parâmetros, relativa ao modelo reduzido (α.12), é dada por:

$$SQPAR(r_1) = \underset{\sim}{\hat{\theta}}'Z'\underset{\sim}{Y}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{H} \underset{\sim}{Y}_j'X_j\right)\left(\sum_{h=1}^{H} X_h'X_h\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{H} X_t'\underset{\sim}{Y}_t\right) \qquad (\alpha.16)$$

com p graus de liberdade.

A soma de quadrados total não-corrigida é dada igualmente por (α.9). Assim,

$$SQTOT(r_1) = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} = \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{Y}_h'\underset{\sim}{Y}_h \qquad (\alpha.17)$$

com N graus de liberdade.

A soma de quadrados do resíduo relativa ao modelo reduzido é obtida pela diferença entre (α.17) e (α.16), em que:

$$SQRES(r_1) = \underset{\sim}{Y}'\left[I - Z(Z'Z)^{-1}Z'\right]\underset{\sim}{Y}$$
$$= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\hat{\theta}}'Z'\underset{\sim}{Y}$$
$$= \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{Y}_h'\underset{\sim}{Y}_h - \left(\sum_{j=1}^{H} \underset{\sim}{Y}_j'X_j\right)\left(\sum_{h=1}^{H} X_h'X_h\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{H} X_t'\underset{\sim}{Y}_t\right) \qquad (\alpha.18)$$

com N - p graus de liberdade.

O teste estatístico para a hipótese H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_H$ (as H equações são idênticas) é baseado na diferença entre a soma de quadrados de parâmetros do modelo completo [(SQPAR(c))] e do modelo reduzido [SQPAR(r_1)], ou seja, na redução que H_0 provoca na soma de quadrados de parâmetros do modelo completo.

Assim, a redução devida à hipótese H_0, denotada por Redução (H_0), é obtida pela diferença entre (α.8) e (α.16), ou seja:

$$
\begin{aligned}
\text{Redução } (H_o) &= SQPAR(c) - SQPAR(r_1) \\
&= \underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\theta}'Z'\underset{\sim}{Y} \\
&= \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{\beta}_h' X_h' \underset{\sim}{Y}_h - \underset{\sim}{\theta}' \sum_{t=1}^{H} X_t' \underset{\sim}{Y}_t
\end{aligned}
\qquad (\alpha.19)
$$

com (H - 1)p graus de liberdade.

Para testar a hipótese

H_o: $\underset{\sim}{\beta}_1 = \underset{\sim}{\beta}_2 = ... = \underset{\sim}{\beta}_H$ (as H equações são idênticas)

vs H_a : $\beta_i \neq \beta_j$ para pelo menos um $i \neq j$ (as H equações não são idênticas) utiliza-se a estatística F, dada por:

$$
F_o = \frac{[SQPAR(c) - SQPAR(r_1)] / (H - 1)p}{SQRES(c)/(N - Hp)} \qquad (\alpha.20)
$$

De acordo com GRAYBILL (3), na hipótese de nulidade de $H_o : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_H$, a estatística ($\alpha$.20) apresenta distribuição F central, com (H - 1)p e (N - Hp) graus de liberdade.

O teste pode ser facilmente visualizado a partir do esquema da análise de variância apresentado no Quadro 2.

QUADRO 2 – Esquema da análise de variância relativa ao teste da hipótese H_o: $\underset{\sim}{\beta}_1 = \underset{\sim}{\beta}_2 = ... = \underset{\sim}{\beta}_H$ (as H equações são idênticas)

Fontes da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F_o
Parâmetros ($\underset{\sim}{\beta}$)	(Hp)	$Q_1 = \underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{Y}$		
Parâmetros ($\underset{\sim}{\theta}$)	p	$Q_2 = \underset{\sim}{\theta}' \sum_{t=1}^{H} X_t'\underset{\sim}{Y}_t$		
Redução (H_o)	(H-1)p	$Q_3 = Q_1 - Q_2$	$V_1 = \frac{Q_3}{(H-1)p}$	V_1/V_2
Resíduo	N-Hp	$Q_4 = Q_5 - Q_1$	$V_2 = \frac{Q_4}{N-Hp}$	
Total	N	$Q_5 = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y}$		

Assim, rejeita-se H_o se e somente se $F_o \geqq F_{\alpha} : (H-1)p, N-HP$,

onde $N = \sum_{h=1}^{H} n_h$.

A não-rejeição da hipótese H_o permite concluir que, a uma significância α, as H equações não diferem significativamente entre si. Assim, a equação ajustada com as estimativas dos parâmetros comuns pode ser usada como uma estimativa das H equações envolvidas.

3.3.2. *Teste para verificar se H equações de regressão têm uma constante de regressão comum*

O esquema da análise da variância relativa ao modelo completo é o mesmo apresentado no Quadro 1.

Sob a hipótese de nulidade:

H_o:$a_1 = a_2 = ... = a_H$ (as H equações têm uma constante de regressão comum)

os modelos em (α.1) reduzem-se à forma

$$
Y_{hi} = a + b_h P_{1hi} + c_h P_{2hi} + e_{hi}, \qquad (\alpha.21)
$$

em que $Y_{hi}, P_{khi}, b_h, c_h$ e e_{hi} têm as mesma especificações dos modelos em (α.1), e $\underline{a}$ é o parâmetro comum.

A partição de $\underset{\sim}{\beta}_h$ e X_h em (α.4) é:

$$
\underset{\sim}{\beta}_h = \begin{bmatrix} a_h \\ \hline \underset{\sim}{\delta}_h \end{bmatrix}, \quad X_h = \left[\underset{\sim}{U}_h \;\vdots\; V_h\right].
$$

em que a_h é 1 x 1 e $\underset{\sim}{\delta}_h$ é (p - 1) x 1.

A seguir, é apresentado o teste estatístico para testar a hipótese

H_o: $a_1 = a_2 = ... = a_H = a$ (desconhecido).

Utilizando a notação matricial, os modelos reduzidos (α.21) podem ser escritos como

$$
\underset{\sim}{Y} = B\underset{\sim}{\gamma} + \underset{\sim}{\varepsilon}, \qquad (\alpha.22)
$$

em que $\underset{\sim}{Y}' = [\underset{\sim}{Y}_1', \underset{\sim}{Y}_2', ..., \underset{\sim}{Y}_H']$

$\underset{\sim}{\gamma}' = [a, \underset{\sim}{\delta}_1', \underset{\sim}{\delta}_2', ..., \underset{\sim}{\delta}_H']$

$$
B = \begin{bmatrix}
\underset{\sim}{U}_1 & V_1 & \emptyset & \cdots & \emptyset \\
\underset{\sim}{U}_2 & \emptyset & V_2 & \cdots & \emptyset \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\underset{\sim}{U}_H & \emptyset & \emptyset & \cdots & V_H
\end{bmatrix}
$$

O sistema de equações normais, relativo ao modelo reduzido (α.22), obtido pelo método dos mínimos quadrados é:

$B'B\tilde{\underset{\sim}{\gamma}} = B'\underset{\sim}{Y}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{H} \underset{\sim}{U}_i'\underset{\sim}{U}_i & \underset{\sim}{U}_1'V_1 & \underset{\sim}{U}_2'V_2 & \cdots & \underset{\sim}{U}_H'V_H \\ V_1'\underset{\sim}{U}_1 & V_1'V_1 & \emptyset & \cdots & \emptyset \\ V_2'\underset{\sim}{U}_2 & \emptyset & V_2'V_2 & \cdots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_H'\underset{\sim}{U}_H & \emptyset & \emptyset & \cdots & V_H'V_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{\delta}_1 \\ \tilde{\delta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\delta}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{H} \underset{\sim}{U}_i'\underset{\sim}{Y}_i \\ V_1'\underset{\sim}{Y}_1 \\ V_2'\underset{\sim}{Y}_2 \\ \vdots \\ V_H'\underset{\sim}{Y}_H \end{bmatrix} \quad (\alpha.23)$$

Sendo a matriz B'B de dimensão [1+H(p-1)] x [1 + H(p-1)] e não-singular, o estimador do vetor de parâmetros tem a seguinte expressão:

$$\tilde{\underset{\sim}{\gamma}} = (B'B)^{-1}B'\underset{\sim}{Y} \quad (\alpha.24)$$

A soma de quadrados de parâmetros relativa ao modelo reduzido (α.22) é dada por:

$$SQPAR(r_2) = \tilde{\underset{\sim}{\gamma}}'B'\underset{\sim}{Y} \quad (\alpha.25)$$

com 1 + H(p - 1) graus de liberdade.

A soma de quadrados total não-corrigida foi dada em (α.9), e a soma de quadrados do resíduo relativa ao modelo reduzido é dada por:

$$SQRES(r_2) = \underset{\sim}{Y}'\left[I - B(B'B)^{-1}B'\right]\underset{\sim}{Y}$$
$$= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \tilde{\underset{\sim}{\gamma}}'B'\underset{\sim}{Y}$$

com N - [1 + H(p - 1)] graus de liberdade.

A redução que H_o provoca na soma de quadrados de parâmetros do modelo completo é dada por:

$$\text{Redução } (H_o) = SQPAR(c) - SQPAR(r_2)$$
$$= \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} - \tilde{\underset{\sim}{\gamma}}'B'\underset{\sim}{Y}$$

com H - 1 graus de liberdade.

Assim, para testar a hipótese,

$H_o: a1 = a2 = ... = aH$ (as H equações têm uma constante de regressão comum).

vs H_a: $ai \neq aj$, para pelo menos um $i \neq j$, utiliza-se a estatística F dada por

$$F_o = \frac{[SQPAR(c) - SQPAR(r_2)]/(H - 1)}{SQRES(c)/(N - Hp)} \quad (\alpha.26)$$

A uma significância α, a decisão sobre o teste de H_o vs H_a é a seguinte: Rejeita-se H_o se e somente se $F_o \geqq F_{\alpha:H-1,\,N-Hp}$. Em caso contrário, não se rejeita H_o.

Esse teste pode ser facilmente visualizado a partir do esquema da análise da variância apresentado no Quadro 3.

QUADRO 3 – Esquema da análise da variância relativa ao teste da hipótese H_o: $a1 = a2 = ... = aH$ (as H equações têm uma constante de regressão comum)

Fontes de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F_o
Parâmetros (β)	(Hp)	$Q_1 = \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y}$		
Parâmetros ($\underset{\sim}{\gamma}$)	1 + H(p-1)	$Q_2 = \tilde{\underset{\sim}{\gamma}}'B'\underset{\sim}{Y}$		
Redução (H_o)	H - 1	$Q_3 = Q_1 - Q_2$	$V_1 = \frac{Q_3}{H-1}$	V_1/V_2
Resíduo	N - Hp	$Q_4 = Q_5 - Q_1$	$V_2 = \frac{Q_4}{N-Hp}$	
Total	N	$Q_5 = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y}$		

3.3.3. *Teste para verificar se H equações de regressão tem um ou mais coeficientes de regressão iguais.*

O esquema da análise da variância relativa ao modelo completo é o mesmo apresentado no Quadro 1.

Sob a hipótese de nulidade,

H_o: $c1 = c2 ... = cH$ (as H equações têm os coeficientes de regressão do termo de segundo grau iguais),

os modelos em (α.1) reduzem-se à forma (α.27)

$$Y_{hi} = a_h + b_hP_{1hi} + cP_{2hi} + e_{hi} \quad (\alpha.28)$$

em que Y_{hi}, P_{khi}, a_h, b_h e e_{hi} têm as mesmas especificações dos modelos em (α.1), e $\underline{c}$ é o parâmetro comum.

A partição de $\underline{\beta}_h$ e X_h em (α.4), generalizando para p parâmetros, é

$$\underline{\beta}_h = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_h \\ ---- \\ \underline{\Psi}_h \end{bmatrix}, \qquad X_h = \begin{bmatrix} U_h & \vdots & V_h \end{bmatrix}$$

em que $\underline{\beta}_h$ é um vetor p x 1, $\underline{\alpha}_h$ é p_1 x 1 ($0 < p_1 < p$) e $\underline{\Psi}_h$ é p_2 x 1($p_2 = p - p_1$).

A seguir, é dado o teste estatístico para testar a hipótese

$$H_o: \underline{\Psi}_1 = \underline{\Psi}_2 = \ldots = \underline{\Psi}_H = \underline{\Psi} \text{ (desconhecido).} \qquad (\alpha.29)$$

Evidentemente, a hipótese em (α.27) é um caso particular da hipótese formulada em (α.29).

Utilizando a notação matricial, o modelo reduzido pode ser escrito como

$$\underline{Y} = W\underline{\Gamma} + \underline{\varepsilon} \qquad (\alpha.30)$$

em que:

$$\underline{Y}' = \left[\underline{Y}_1', \underline{Y}_2'; \ldots, \underline{Y}_H'\right]$$

$$\underline{\Gamma}' = \left[\underline{\alpha}_1', \underline{\alpha}_2', \ldots, \underline{\alpha}_H', \underline{\Psi}'\right]$$

$$W = \begin{bmatrix} U_1 & \emptyset & \ldots & \emptyset & V_1 \\ \emptyset & U_2 & \ldots & \emptyset & V_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \emptyset & \emptyset & \ldots & U_H & V_H \end{bmatrix}$$

O sistema de equações normais relativo ao modelo reduzido (α.30), obtido pelo método dos mínimos quadrados, é

$W'W\tilde{\underline{\Gamma}} = W'\underline{Y}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} U_1'U_1 & \emptyset & \ldots & \emptyset & U_1'V_1 \\ \emptyset & U_2'U_2 & \ldots & \emptyset & U_2'V_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \emptyset & \emptyset & \ldots & U_H'U_H & U_H'V_H \\ V_1'U_1 & V_2'U_2 & \ldots & V_H'U_H & \sum_{i=1}^{H} V_i'V_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\alpha}}_1 \\ \tilde{\underline{\alpha}}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{\underline{\alpha}}_H \\ \tilde{\underline{\Psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1'\underline{Y}_1 \\ U_2'\underline{Y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_H'\underline{Y}_H \\ \sum_{i=1}^{H} V_i'\underline{Y}_i \end{bmatrix} \qquad (\alpha.31)$$

Sendo a matriz W'W de dimensão ($Hp_1 + p_2$) x ($Hp_1 + p_2$) e não-singular, o estimador do vetor de parâmetros tem a seguinte expressão:

$$\tilde{\underline{\Gamma}} = (W'W)^{-1}W'\underline{Y} \qquad (\alpha.32)$$

A soma de quadrados de parâmetros relativa ao modelo reduzido (α.30) é dada por:

$$SQPAR(r_3) = \tilde{\underline{\Gamma}}'W'\underline{Y} \qquad (\alpha.33)$$

com $Hp_1 + p_2$ graus de liberdade.

A soma de quadrados total não-corrigida é dada em (α.9), e a soma de quadrados do resíduo relativa ao modelo reduzido é dada por:

$$\begin{aligned} SQRES(r_3) &= \underline{Y}' \left[I - W(W'W)^{-1}W'\right] \underline{Y} \\ &= \underline{Y}'\underline{Y}. - \tilde{\underline{\Gamma}}'W'\underline{Y} \end{aligned} \qquad (\alpha.34)$$

com N - ($Hp_1 + p_2$) graus de liberdade.

A redução que H_o provoca na soma de quadrados de parâmetros do modelo completo é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Redução } (H_o) &= SQPAR(c) - SQPAR(r3) \\ &= \hat{\underline{\beta}}'X'\underline{Y} - \tilde{\underline{\Gamma}}'W'\underline{Y} \end{aligned}$$

com (H - 1)p_2 graus de liberdade.

Assim, para testar a hipótese

H_o: $\underline{\Psi}_1 = \underline{\Psi}_2 = \ldots \underline{\Psi}_H = \underline{\Psi}$ (desconhecido) vs H_a: $\Psi h \neq \Psi h'$, para pelo menos um $h \neq h' = 1, 2, ..., H$, utiliza-se a estatística F, dada por:

$$F_o = \frac{\left[SQPAR(c) - SQPAR(r_3)\right] / (H - 1)p_2}{SQRES(c)/(N - Hp)} \qquad (\alpha.35)$$

A uma significância α, a decisão sobre o teste de H_o vs H_a é a seguinte: Rejeita-se H_o se e somente se $F_o \geqq F_{\alpha:(H-1)p_2,\ N-Hp}$. Em caso contrário, não se rejeita H_o.

O teste pode ser facilmente visualizado a partir do esquema da análise da variância apresentado no Quadro 4.

QUADRO 4 – Esquema da análise da variância relativa ao teste da hipótese H_o : $\Psi 1 = \Psi 2 = ... = \Psi H$ 1/

Fontes de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Parâmetros (β)	(Hp)	$Q_1 = \hat{\beta}'X'Y$		
Parâmetros (Γ)	$Hp_1 + p_2$	$Q_2 = \hat{\Gamma}'W'Y$		
Redução (H_o)	$(H-1)p_2$	$Q_3 = Q_1 - Q_2$	$V_1 = \frac{Q_3}{(H-1)p_2}$	V_1/V_2
Resíduo	$N - Hp$	$Q_4 = Q_5 - Q_1$	$V_2 = \frac{Q_4}{N - Hp}$	
Total	N	$Q_5 = Y'Y$		

1/ Esse teste é geral, isto é, pode testar a igualdade de um, alguns ou todos os coeficientes de regressão do modelo.

4. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO

Julgou-se adequada a ilustração dos resultados obtidos neste estudo. Assim, com base nos dados do Quadro 5, foram efetuados os cálculos, ilustrando os procedimentos apresentados.

Com os dados do Quadro 5 e considerando o modelo polinomial do segundo grau, efetuou-se a análise da variância da regressão, a fim de obter inicialmente as variâncias residuais para aplicação do teste de homogeneidade, cujos resultados estão apresentados no Quadro 6.

Assim, a hipótese de homogeneidade das variâncias residuais não foi rejeitada ($P > 0,05$). São apresentados a seguir os testes para as três hipóteses formuladas.

QUADRO 5 – Dados relativos à produção (kg/parcela) de quatro variedades em sete níveis de adubação 1/

Variedades	Níveis de Adubação (kg/ha)						
	0	30	60	90	120	150	180
1	81,3	110,4	227,5	261,7	268,7	250,7	190,7
2	139,4	157,7	220,2	305,0	283,2	249,9	216,2
3	68,0	166,5	216,7	265,5	297,0	214,9	199,6
4	92,0	160,4	250,7	253,5	300,7	254,7	228,1

1/ Dados simulados.

QUADRO 6 – Resumo da análise da variância da regressão e do teste da homogeneidade de variâncias

Fontes da Variação	G.L.	Quadrados Médios			
		Variedade 1	Variedade 2	Variedade 3	Variedade 4
Parâmetros	3	102649,3411	123931,2833	107375,9985	122453,6522
Resíduo	4	627,4091	853,8825	474,6411	316,5333
Total	7				

$H_o: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 \Rightarrow \chi^2_{obs.} = 0,935$ n.s.

n.s. Não-significativo ($P > 0,05$), pelo teste de Bartlett.

4.1. *Teste para igualdade das equações de regressão*

As equações ajustadas mediante o emprego da técnica dos polinômios ortogonais estão apresentadas no Quadro 7 e as equações descodificadas no Quadro 8.

O teste da hipótese H_o: $\beta 1 = \beta 2 = \beta 3 = \beta 4$, isto é, quatro equações idênticas, está apresentado no Quadro 9.

Com base no teste apresentado no Quadro 9, a hipótese H_o não foi rejeitada, concluindo-se que as quatro equações não diferem, estatisticamente, a 5% de probabilidade. Assim, a equação comum pode ser usada como uma estimativa das quatro equações envolvidas.

É importante ressaltar que, para a hipótese que acabou de ser testada, trabalhando com o modelo ortogonal (estimadores dos parâmetros não-correlacionados), ou não, os resultados são idênticos ao apresentado no Quadro 9. Uma vantagem de se trabalhar com o modelo ortogonal reside no fato de que as matrizes X'X são diagonais.

QUADRO 7 – Equações de regressão ajustadas mediante o emprego da técnica dos polinômios ortogonais [1/]

Variedades	Equações Ajustadas	R^2(%)
1	$\hat{Y}_{1i} = 198{,}7143 + 23{,}2143\ x_i - 13{,}9928(x_i^2 - 4)$	92,6
2	$\hat{Y}_{2i} = 224{,}5143 + 17{,}0643\ x_i - 11{,}3357(x_i^2 - 4)$	84,7
3	$\hat{Y}_{3i} = 204{,}0286 + 20{,}4250\ x_i - 15{,}0607(x_i^2 - 4)$	94,2
4	$\hat{Y}_{4i} = 220{,}0143 + 23{,}1036\ x_i - 12{,}7107(x_i^2 - 4)$	95,7
Comum	$\hat{Y}_i = 221{,}8178 + 20{,}9518\ x_i - 13{,}2750(x_i^2 - 4)$	88,8

1/ $x_i = \dfrac{X_i - \bar{X}}{q} = \dfrac{X_i - 90}{30}$; os estimadores dos parâmetros são não-correlacionados.

QUADRO 8 – Equações de regressão ajustadas expressas na variável original X

Variedades	Equações Ajustadas	R^2(%)
1	$\hat{Y}_{1i} = 59{,}1074 + 3{,}5724\ X_i - 0{,}015547\ X_i^2$	92,6
2	$\hat{Y}_{2i} = 116{,}6429 + 2{,}8359\ X_i - 0{,}012595\ X_i^2$	84,7
3	$\hat{Y}_{3i} = 67{,}4501 + 3{,}6930\ X_i - 0{,}016734\ X_i^2$	94,2
4	$\hat{Y}_{4i} = 87{,}1500 + 3{,}3123\ X_i - 0{,}014123\ X_i^2$	95,7
Comum	$\hat{Y}_i = 82{,}5874 + 3{,}3534\ X_i - 0{,}014750\ X_i^2$	88,8

QUADRO 9 – Análise da variância relativa ao teste da hipótese H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ (as quatro equações são idênticas)

Fontes de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Parâmetros (β)	(12)	(1369230,8254)		
Parâmetros (θ)	3	1364647,4938		
Redução (H_0)	9	4583,3316	509,2591	<1 n.s.
Resíduo	16	9089,8646	568,1165	
Total	28	1378320,6900		

n.s. Não-significativo (P > 0,05).

4.2. *Teste para verificar se as equações de regressão têm uma constante de regressão comum.*

Os resultados do teste para verificar se as quatro equações de regressão têm uma constante de regressão comum está apresentado no Quadro 10, concluindo-se pela não-rejeição da hipótese de nulidade.

É interessante ressaltar que, no modelo ortogonal (Quadro 7), tem-se que $\hat{a}_h = \bar{Y}_h$, portanto o teste apresentado no Quadro 10 testa a igualdade das constantes dos modelos apresentados no Quadro 7. Naturalmente, um teste para a igualdade das constantes de regressão dos modelos apresentados no Quadro 8 daria um resultado diferente do apresentado no Quadro 10, isso porque as hipóteses seriam diferentes. O método é o mesmo tanto num caso quanto no outro, pois o importante é saber o que está sendo testado.

QUADRO 10 – Análise da variância relativa ao teste da hipótese $H_0: a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ (as quatro equações têm uma constante de regressão comum)

Fontes de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Parâmetros (β)	(12)	(1369230,8254)		
Parâmetros (γ)	9	1366005,0802		
Redução(H_0)	3	3225,7452	1075,2484	1,89 n.s.
Resíduo	16	9089,8646	568,1165	
Total	28	1378320,6900		

n.s. Não-significativo (P > 0,05).

4.3. *Teste para verificar se as equações de regressão têm os coeficientes de regressão do termo de segundo grau iguais.*

O resultado do teste para verificar se as quatro equações de regressão têm os coeficientes de regressão do termo de segundo grau iguais está apresentado no Quadro 11, concluindo-se pela não-rejeição da hipótese de nulidade.

Para o teste apresentado no Quadro 11, utilizando-se os modelos dos Quadros 7 ou 8, os resultados são exatamente os mesmos, pois os coeficientes diferem apenas pela constante q^2, o que não altera o teste. Isso é sempre verdadeiro para o termo de mais alto grau, pois testes para coeficientes de termos inferiores darão reesultados diferentes, porque estariam testando hipóteses diferentes.

5. *CONCLUSÕES*

1) A identidade de modelos de regressão e igualdade de qualquer subconjunto de parâmetros pode ser verificada por meio do teste F.

2) A metodologia apresentada é geral e pode ser usada em modelos polinomiais de qualquer grau, ortogonal ou não, e também em modelos de regressão múltipla.

QUADRO 11 – Análise da variância relativa ao teste da hipótese H_0: $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$ (as quatro equações têm os coeficientes do termo de segundo grau iguais)

Fontes de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Parâmetros ($\underset{\sim}{\beta}$)	(12)	(1369230,8254)		
Parâmetros ($\underset{\sim}{\Gamma}$)	9	1368577,1389		
Redução (H_0)	3	653,6865	217,8955	<1 n.s.
Resíduo	16	9089,8646	568,1165	
Total	28	1378320,6900		

n.s. Não-significativo (P > 0,05).

5. RESUMO

Neste trabalho, foi considerado o ajustamento de H equações de regressão polinomial de grau k, mediante o emprego da técnica dos polinômios ortogonais. O modelo linear para a h-ésima equação é $\underset{\sim}{Y}_h = X_h\underset{\sim}{\beta}_h + \underset{\sim}{\varepsilon}_h$, em que $\underset{\sim}{Y}_h$ é um vetor n_h x 1 de realizações de variáveis aleatórias, X_h uma matriz n_h x p de constantes conhecidas, $\underset{\sim}{\beta}_h$ um vetor p x 1 de parâmetros desconhecidos e $\underset{\sim}{\varepsilon}_h$ um vetor n_h x 1 de erros aleatórios supostos NID ($\underset{\sim}{\varepsilon}_h$: ϕ, $\sigma^2 I$). Na estimação dos parâmetros, utilizou-se o método dos mínimos quadrados. As três hipóteses consideradas foram: a) H_0: As H equações são idênticas; b) H_0: As H equações têm uma constante de regressão comum; e c) H_0: As H equações têm alguns coeficientes de regressão iguais. Para verificação das três hipóteses foi dada uma derivação, chegando-se ao teste F. Como ilustração, esse método foi aplicado a um conjunto de H = quatro equações de regressão polinomial de segundo grau.

7. SUMMARY

(IDENTITY TEST FOR REGRESSION MODELS AND PARAMETERS EQUALITY IN ORTHOGONAL POLYNOMIAL MODELS)

In this paper the adjustment of H equations of polinomial regression of k degree was considered by the use of the orthogonal polynomial technique. The linear model for the h^{th} equation is $\underset{\sim}{Y}_h = X_h\underset{\sim}{\beta}_h + \underset{\sim}{\varepsilon}_h$, where $\underset{\sim}{Y}_h$ is an n_h x 1 vector of observations, X_h is an n_h x p matrix of known constant, $\underset{\sim}{\beta}_h$ is an p x 1 vector of unknown parameters and $\underset{\sim}{\varepsilon}_h$ is an n_h x 1 vector of error that is distributed N($\underset{\sim}{\varepsilon}_h$: $\sigma,\alpha^2 I$). In the parameters estimation, the Least Square Method was used. The three considered hypotheses were: a) H_0: The H equations are identical, b) H_0: The H equations have a common constant regression and c) H_0: The H equations have some equals regression coefficients. An appropriate derivation was used to verify the three hypotheses resulting in the F test. This methodology was applied in a set of H = 4 polynomial regression equation of second degree.

8. LITERATURA CITADA

1. BROWN, B.W. Simple comparisons of simultaneous regression lines. *Biometrics, 26*(1):143-144, 1970.

2. CONAGIN, A.; NAGAI, V. & IGUE, T. Poder discriminativo de diferentes testes de comparação de médias *Rev. de Agricultura, 65(2):*203-214, 1990.

3. GRAYBILL, F.A. *Theory and application of the linear model. Belmont* Duxbury Press, 1976. 704p.

4. LI, J.C.R. *Statistical inference. Ann. Arbor,* Edwards Brothers, Inc., vol. I, 1964. 658 p.

5. NAGAI, V.; CONAGIN, A. & IGUE, T. Sensibilidade de diferentes testes de homogeneidade das variâncias. *Rev. de Agricultura, 66(1):*65-76, 1991.

6. NETER, J. & WASSERMAN, W. *Applied linear statistical models. Regression, analysis of variance and experimental designs.* Homewood Richard D. Irwin, Inc., 1974. 842 p.

7. PIMENTEL - GOMES F. *Curso de Estatística Experimental.* 13ª ed. Piracicaba, SP, Livraria Nobel, 1990. 468 p.

8. STEEL, R.G.D. & TORRIE, J.H. *Principles and procedures of statistics.* New York, McGraw-Hill Book Company, 1980. 633 p.

9. SWAMY, P.A.V. & MEHTA, J.S. Estimation of common coefficients in two regression equations. *Journal Econometris, 10*(1):1-14, 1979.