

DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO GAMA, EM FUNÇÃO DAS ALTURAS MÉDIAS MENSAS DE PRECIPITAÇÃO DOS DIAS CHUVOSOS¹

Gilberto C. Sedyama²
José Swami P. de Melo³
Adil Rainier Alves²
Dirceu T. Coelho²

1. INTRODUÇÃO

Os dados de precipitação nos postos climatológicos podem ser analisados estatisticamente, verificando-se com que frequência ocorre determinada magnitude de chuva. Entretanto, o maior problema de uso de qualquer procedimento estatístico é a estimativa dos parâmetros de distribuição do modelo estatístico.

A distribuição gama de dois parâmetros tem sido empregada no ajustamento de frequências de totais de precipitação, observados sob diferentes condições de clima, em intervalos diários, semanais, quinzenais e mensais.

Em função da flexibilidade nesses ajustamentos, Freidman e James, citados por WEAVER e MILLER(13) e ISON *et alii* (6), empregam tais modelos às frequências de totais mensais de precipitação, observados em várias estações dos Estados Unidos. Mooley, citado por ESSENWANGER

¹ Aceito para publicação em 13.06.1995.

² Departamento de Engenharia Agrícola, Universidade Federal de Viçosa. 36571-000 Viçosa, MG.

³ Departamento de Engenharia Rural, Universidade Federal Rural de Pernambuco. 52171-900 Recife, PE.

O primeiro e terceiro autores são bolsistas do CNPq.

(4), demonstrou ser a distribuição gama de dois parâmetros adequada para a descrição das frequências de totais mensais de precipitação em diversas localidades da Ásia. AZEVEDO (1) também comprovou o ajustamento desse modelo às frequências de totais mensais de precipitação em dezenas de estações, em todas as regiões brasileiras. BERNARDO (2), SEDIYAMA *et alii* (10), MAROUELLI (8) e CASTRO NETO e SILVEIRA (3), por outro lado, ajustaram esse modelo à distribuição de frequências de totais de chuva em período de 10 dias, para várias localidades brasileiras.

Para dados agrupados em 13 períodos de quatro semanas, referentes a três estações dos Estados Unidos, ISON *et alii* (6) ajustaram famílias de funções gama para descrever as distribuições de frequências de totais diários de precipitação e, por intermédio desses ajustamentos, estudaram as variações sazonais em seus parâmetros. GENG *et alii* (5) também aplicaram tais distribuições às frequências de totais diários de chuva, agrupados em períodos mensais, referentes a sete estações, sendo cinco nos Estados Unidos, uma na Holanda e outra nas Filipinas.

De um lado, considerando famílias de distribuição gama ajustadas às frequências de totais diários de chuvas, agrupados em 28 períodos de 13 dias, em três estações dos Estados Unidos, YEVJEVICH (14) verificou forte assimetria nessas distribuições, com base em dados registrados nas estações de Fort Collins (Colorado), Durango (Colorado) e Austin (Texas), todas nos Estados Unidos. Por outro lado, a caracterização dos parâmetros da distribuição gama de probabilidade por meio de técnicas estatísticas clássicas fica prejudicada pela dificuldade em adquirir dados diários de chuva referentes a longos períodos de observação, para a maioria das localidades brasileiras, uma vez que essas técnicas envolvem a manipulação e o processamento de uma quantidade considerável de dados.

Diversos fatores dificultam a caracterização da distribuição gama de dois parâmetros nas regiões tropicais. Certamente entre esses se relacionam a inexistência de registros históricos de dados diários de chuva e o reduzido número de postos climatológicos alocados nessas áreas.

Não obstante isso, há muitos aspectos dessa distribuição que podem ser revelados pelas análises de séries temporais de dados de chuva referentes a períodos de observação relativamente curtos.

Tendo em vista a superação dessas dificuldades, o presente trabalho foi desenvolvido com o objetivo de determinar os parâmetros da distribuição gama, em função das alturas médias mensais de precipitação dos dias chuvosos, e analisar as dependências no tempo e no espaço de tais parâmetros.

2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

De acordo com THOM (12), a distribuição gama pode ser expressa por meio da função densidade de probabilidade:

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} & \text{para; } 0 < y < \infty \\ 0, & \text{para outros intervalos} \end{cases} \quad (\text{Eq. 1})$$

com $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\Gamma(\alpha) > 0$, em que

α = parâmetro de forma (adimensional);

β = parâmetro de escala (mm); e

y = total de precipitação (mm):

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (\text{função gama}) \quad (\text{Eq. 2})$$

Segundo Shenton e Bowan, citados por ESSENWANGER (4), os estimadores verossimilhantes dos parâmetros de forma (α) e de escala (β) propostos por THOM (11) apresentam tendência para valores do parâmetro de forma inferior à unidade. Por esse motivo, Greenwood e Durand, citados por GENG *et alii* (5), sugerem o emprego das seguintes estimativas:

a) Parâmetro de forma:

$$\hat{\alpha} = (0,5000876 + 0,16488552A - 0,0542744A^2) / A \quad (\text{Eq. 3})$$

em que

$$A = \ln \bar{y}_i - \overline{\ln y_i}; e$$

b) Parâmetro de escala:

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{y}_i}{\hat{\alpha}} \quad (\text{Eq. 4})$$

Com relação às estimativas desses parâmetros no ajustamento da distribuição gama aos totais diários de precipitação, ISON *et alii* (6), YEVJEVICH (14) e GENG *et alii* (5) constataram forte assimetria ($\alpha < 1,00$) e verificaram que, ao contrário do parâmetro de forma, o parâmetro

de escala apresentou variações sazonais bastante significativas.

Contrastando com GENG *et alii* (5), que empregaram as equações 3 e 4, ISON *et alii* (6) e YEVJEVICH (14) serviram-se das estimativas desses parâmetros propostas por THOM (11). Apesar dessas diferenças metodológicas, os resultados obtidos por esses pesquisadores indicam que a forma da distribuição gama ajustada às frequências de totais diários de precipitação apresentam forte assimetria ($\alpha < 1,00$). Buscando explicação para esses fatos, GENG *et alii* (5) observaram que os estimadores verossimilhanes do parâmetro de forma associaram-se aos pequenos valores de precipitação, enquanto os estimadores dos parâmetros de escala indicavam em que medida as chuvas intensas podem ocorrer em determinadas localidades. Com base nessas constatações, esses autores sugeriram que, mesmo sob condições climáticas distintas, o parâmetro de escala pode ser estimado em função da altura média mensal de precipitação dos dias chuvosos.

De acordo com LARSEN e PENSE (7), os gráficos das equações reportados pela distribuição gama (Equação 1) apresentam formas características. No caso de $0 < \alpha < 1$, a forma dessa distribuição assemelha-se a um "j" reverso no primeiro quadrante, com comportamento assintótico em ambos os eixos coordenados. Para valores $\alpha \geq 1$, tais distribuições exibem, no primeiro quadrante, formas semelhantes às de um sino, podendo ou não apresentar comportamento assintótico com relação ao eixo das abcissas. Em ambas as situações, entretanto, as curvas representativas dessas distribuições apresentam assimetrias positivas e se aproximam da origem do sistema de coordenadas.

Forçando-se a passagem de tais curvas sobre a origem do sistema de coordenadas, a integração da equação 1 no intervalo $0 < Y < Y_0$ fornece as probabilidades de ocorrência totais de precipitação iguais ou inferiores a um dado valor de Y_0 (mm):

$$P_y(Y \leq Y_0) = \int_0^{Y_0} f_y(Y) dY \quad (\text{Eq. 5})$$

De acordo com Thom, citado por NIMER (9), a substituição da variável Y por $b = Y/\beta$ permite rescrever a equação como:

$$P_y(Y \leq Y_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{Y_0/\beta} b^{\alpha-1} e^{-b} db \quad (\text{Eq. 6})$$

Segundo NIMER (9), a expansão em série hipergeométrica da equação anterior permite a determinação das probabilidades, com suficiente aproximação, mediante o emprego da seguinte fórmula:

$$R_Y(Y \leq Y_0) = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1).e^{-b}} \left(1 + \frac{b}{(\alpha+1)} + \frac{b^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{b^3}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \dots \right) \quad (\text{Eq. 7})$$

3. MATERIAL E MÉTODOS

A base de dados para o ajustamento dos modelos, usados neste trabalho, constitui-se de séries temporais de totais diários de precipitação registrados nas estações climatológicas de Catalão (GO), Goiânia (GO), Lavras (MG), Patos de Minas (MG), Uberaba (MG) e Viçosa (MG).

As coordenadas geográficas dessas estações, bem como o período de registros analisados, encontram-se discriminadas no Quadro 1.

QUADRO 1 - Coordenadas geográficas e períodos de observação das estações climatológicas estudadas

Local	Latitude (S)	Longitude (W)	Altitude (m)	Período
Catalão	18°10'	47°58'	848	1961-1978
Goiânia	16°48'	49°15'	741	1961-1978
Lavras	21°14'	45°00'	910	1968-1986
Patos de Minas	18°36'	46°31'	896	1961-1980
Uberaba	19°45'	47°55'	743	1965-1985
Viçosa	20°45'	42°51'	651	1968-1984

Exceto a estação de Viçosa, situada na Zona da Mata mineira, as demais estações encontram-se em região de cerrados (savana). Segundo a classificação climática de Köppen, as localidades de Catalão, Goiânia e Uberaba apresentam climas tropicais chuvosos (Aw). Em contraste, os climas de Patos de Minas (Cwa), Viçosa (Cwa) e Lavras (Cwb) enquadram-se na categoria de climas tropicais de altitude.

Os dados de chuva, organizados em seqüências mensais, foram recuperados a partir de fitas magnéticas obtidas no Instituto Nacional de Meteorologia e Instituto de Pesquisas Espaciais e processados na Central de Processamento de Dados da Universidade Federal de Viçosa.

Para todos os efeitos, as seqüências mensais que apresentaram falta de um ou mais elementos foram descartadas e os últimos elementos de seqüências referentes aos meses de fevereiro em anos bissextos, ignorados.

Com a finalidade de ajustar a distribuição gama de dois parâmetros

às frequências de totais diários de precipitação em cada um dos meses e localidades analisados, os valores nulos desses elementos, nas seqüências mensais observadas, foram separados dos valores maiores ou iguais a 0,1 mm (uma vez que foi considerado apenas o dia chuvoso).

Após essa separação, as alturas de chuva maiores ou iguais a 0,1 mm, constantes em cada uma das seqüências originais, foram agrupadas em seqüências Y_1, Y_2, \dots, Y_j de valores observados de uma variável aleatória contínua, Y_j , em que o índice subscrito denota a ordem do elemento nos grupos ($j \leq$ número de dias do mês).

De acordo com esse procedimento, as alturas médias mensais de precipitação por dia chuvoso foram calculadas, para dado mês e localidade, por meio da expressão:

$$\bar{H} = \frac{\sum_{g=1}^G \sum_{j=1}^J y_j}{\sum_{g=1}^G N_g} \quad (\text{Eq. 8})$$

em que

\bar{H} = altura média mensal de precipitação dos dias chuvosos (mm/dia);

y_j = altura diária de precipitação registrada no j -ésimo elemento;

N_g = número de dias chuvosos no g -ésimo agrupamento;

J = número de elementos no g -ésimo agrupamento; e

G = número de agrupamentos considerados.

Os estimadores verossimilhantes dos parâmetros de forma e de escala foram determinados, conforme sugeriram Greenwood e Duran, citados por GENG *et alii* (5), da seguinte maneira:

a) Parâmetro de forma:

$$\hat{\alpha} = (0,5000876 + 0,16488552A - 0,0542274A^2)/A \quad (\text{Eq. 9})$$

em que

$$A = \frac{\sum_{g=1}^G \sum_{j=1}^J \text{Ln} y_j}{\sum_{g=1}^G N_g}$$

b) Parâmetros de escala:

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{H}}{\hat{\alpha}} \quad (\text{Eq. 10})$$

em que

$\hat{\beta}$ = parâmetro de escala da distribuição gama (mm/dia);

\bar{H} = altura média mensal de precipitação por dia chuvoso (mm/dia); e

$\hat{\alpha}$ = parâmetro de forma da distribuição gama.

Por intermédio de gráficos, analisaram-se, no tempo e no espaço, os comportamentos dos parâmetros de formas, dos parâmetros de escala e das alturas médias mensais de precipitação dos dias chuvosos.

As evidências de relacionamento entre os parâmetros de escala e as alturas médias de precipitação dos dias chuvosos foram investigadas por meio de estudos de regressão simples e correlação entre essas variáveis, com o auxílio do programa SAEG.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com base em dados diários de precipitação, registrados nas estações climatológicas de Catalão, Goiânia, Lavras, Pato de Minas, Uberaba e Viçosa, determinaram-se as probabilidades de ocorrência de dias chuvosos em 10 dias consecutivos, para períodos mensais, e, também, as precipitações dependentes diárias, em níveis selecionados de probabilidades, para agrupamentos mensais de alturas diárias de chuva.

Com a finalidade de facilitar as estimativas verossimilhantes dos parâmetros dessas distribuições, estabeleceram-se relações funcionais (empíricas) capazes de determinar tais parâmetros, independentemente do tempo e do espaço, a partir de sumários climatológicos mensais.

O número de amostras consideradas no ajustamento da distribuição gama de dois parâmetros às alturas diárias de precipitação agrupadas em intervalos mensais apresentou marcantes diferenças entre os meses referentes às estações seca e chuvosa (Quadro 2).

Considerando tais contrastes, observados em todas as localidades estudadas, as estimativas verossimilhantes dos parâmetros dessas distribuições devem ser encaradas com reserva nos meses secos, em função da forte redução na amostragem. Por causa disso, recomenda-se proceder ao exame de adequabilidade desses ajustamentos em futuros estudos, mediante a aplicação do teste de aderência.

Mesmo desconsiderando possíveis tendenciosidades nas estimativas dos parâmetros de forma e de escala, nos meses referentes à estação seca, a distribuição gama de dois parâmetros foi ajustada às frequências de alturas diárias de precipitação em dias chuvosos, em todas as localidades analisadas. Em todos os casos, a forma dessas distribuições exibiu assimetria positiva ($\hat{\alpha} < 1,00$). Isso porque os valores observados das

QUADRO 2 - Número de amostras aleatórias de totais diários de precipitação, empregadas no ajustamento da distribuição gama de dois parâmetros

Estações	Janeiro	Fevereiro
Catalão	334* (18;0;0)**	29 (18;8;0)
Catalão	384 (18;0;0)	23 (15;9;0)
Lavras	367 (18;0;0)	53 (17;62)
Patos de Minas	399 (20;0;1)	41 (20;8;0)
Uberaba	334 (16;0;5)	33 (17;6;4)
Viçosa	394 (17;0;0)	125 (16;1;1)

* Número de amostras de totais diários de precipitação, empregadas nas estimativas dos parâmetros α e β .

** Número de anos estudados, agrupamentos separados por falta de chuva (mês seco) e agrupamentos descartados por falta de um ou mais registros.

precipitações em dias chuvosos apresentaram, em sua maioria, valores relativamente baixos; além disso, valores excessivamente elevados (60 mm/dia ou mais) raramente foram registrados.

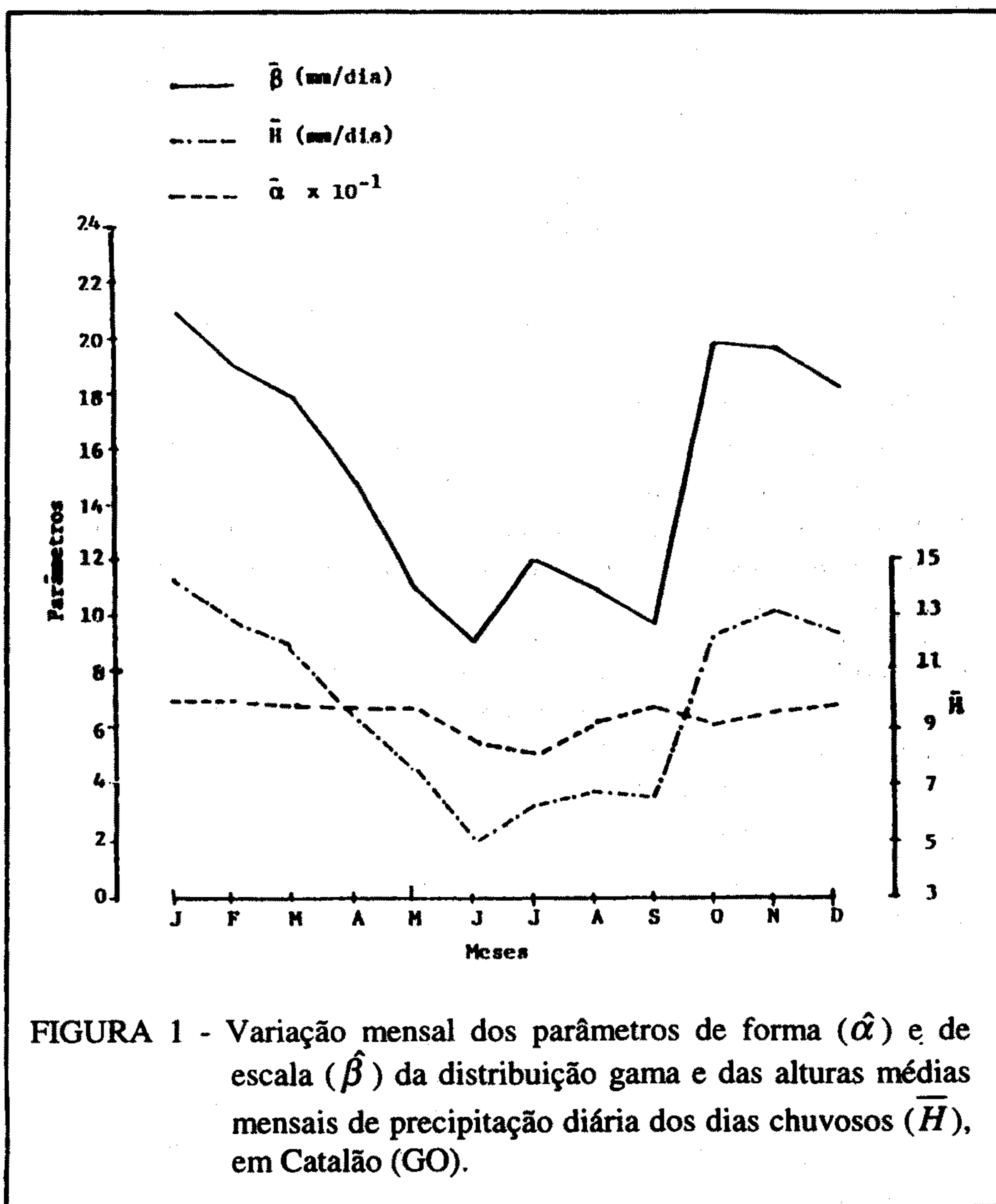
Os comportamentos dos estimadores dos parâmetros de forma ($\hat{\alpha}$) e de escala ($\hat{\beta}$) e das alturas médias mensais de precipitação dos dias chuvosos (\bar{H}) foram analisados no tempo e no espaço. Para isso, construíram-se gráficos de $\hat{\alpha}$ versus mês, de $\hat{\beta}$ versus mês e de \bar{H} versus mês. Em todos esses gráficos, entretanto, as curvas representativas do parâmetro de escala se apresentaram praticamente paralelas às curvas das alturas médias mensais de precipitação dos dias chuvosos, como se pode ver, por exemplo, nas Figuras 1 (Catalão) e 2 (Viçosa).

As análises desses gráficos, por outro lado, sugeriram possibilidade de relacionamento funcional entre o parâmetro escala e a altura média mensal de precipitação dos dias chuvosos.

Os indícios de relacionamento entre os estimadores verossimilhantes dos parâmetros de escala ($\hat{\beta}$) e as alturas médias mensais de precipitação por dias chuvosos (\bar{H}) foram explorados por meio de estudos de regressão simples e de correlação entre essas variáveis, em todas as localidades e no conjunto de localidades analisadas (Quadro 3).

Com base nessas análises, constatou-se que esse relacionamento independe do tempo e do espaço. Assim, os parâmetros de escala (β) podem ser estimados pela reta de regressão:

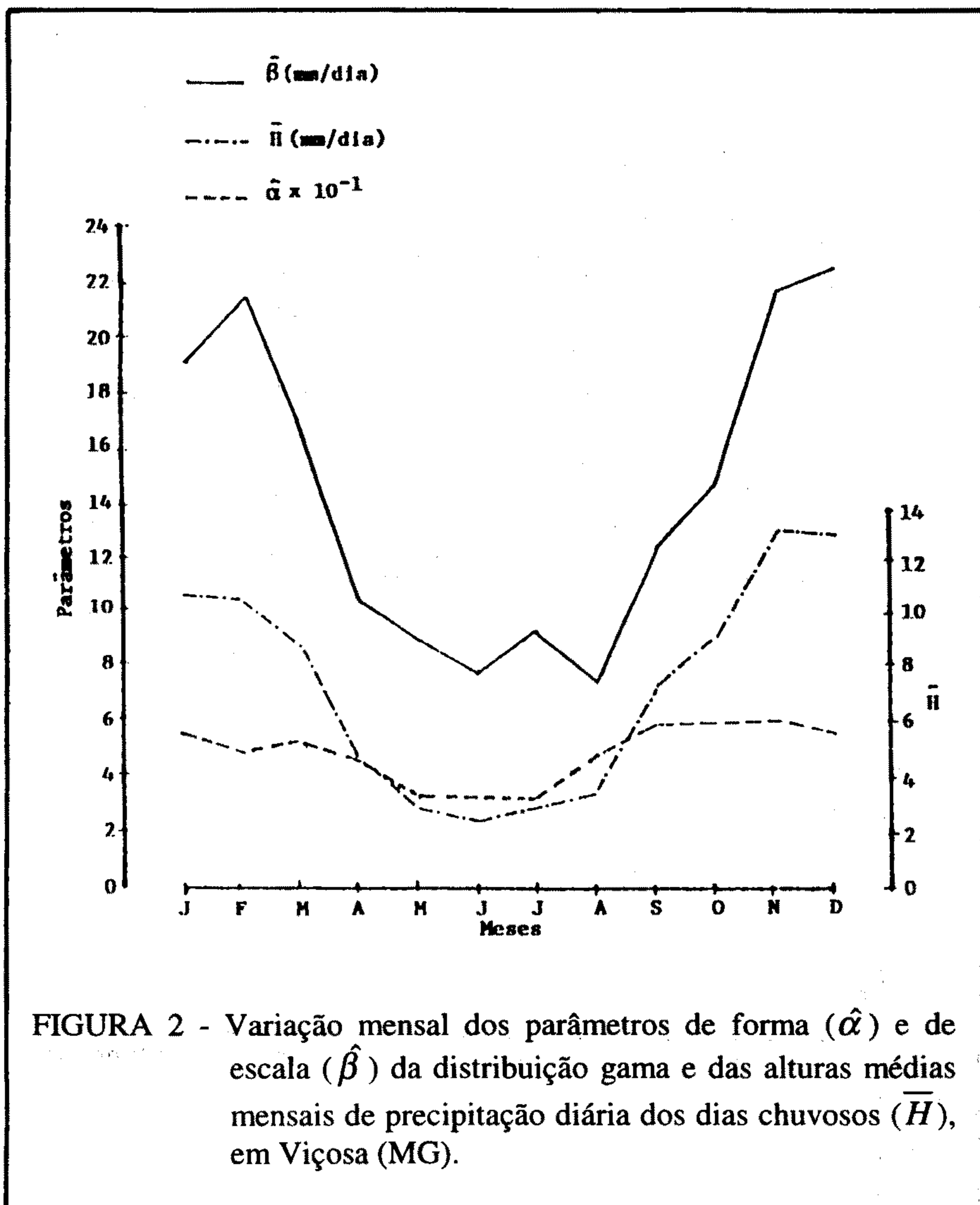
$$\hat{\beta} = 3,85 + 1,15 \bar{H} \quad (\text{Eq.11})$$



a qual explica 82,7% das variações observadas do parâmetro de escala em quaisquer dos meses e das localidades estudadas. Observou-se, todavia, que a maior incidência de dados de chuva entre 0,1 e 1,0 mm diminuiu o valor de r^2 para as cidades de Lavras e Uberaba.

Uma vez que as estimativas verossimilhantes dos parâmetros de escala relacionam-se com as estimativas dos parâmetros de forma (Equação 10), estes últimos podem ser facilmente determinados, por intermédio da seguinte equação:

$$\hat{\alpha} = \bar{H} (3,85 + 1,15 \bar{H})^{-1} \quad (\text{Eq. 12})$$



Esses processos de estimar os parâmetros da distribuição gama foram resumidos por meio da construção do diagrama mostrado na Figura 3.

5. RESUMO E CONCLUSÕES

Em todos os setores da economia é possível encontrar exemplos nos quais os conhecimentos acerca das distribuições das chuvas no espaço e no tempo desempenham papel relevante no processo de tomada de

QUADRO 3 - Coeficientes das retas de regressão ajustadas aos parâmetros de escala da distribuição gama em função das alturas médias mensais de precipitação dos dias chuvosos ($\hat{\beta} = a_1 + b_1 \bar{H}$)

Estações	a_1	b_1	r^2	cv
Catalão	2,38	1,31	0,961	0,006
Goiânia	1,07	1,45	0,942	0,079
Lavras	4,84	0,79	0,785	0,095
Patos de Minas	3,19	1,24	0,909	0,085
Uberaba	1,96	1,19	0,822	0,114
Viçosa	3,90	1,42	0,949	0,095
Combinação	3,85	1,15	0,827	0,118

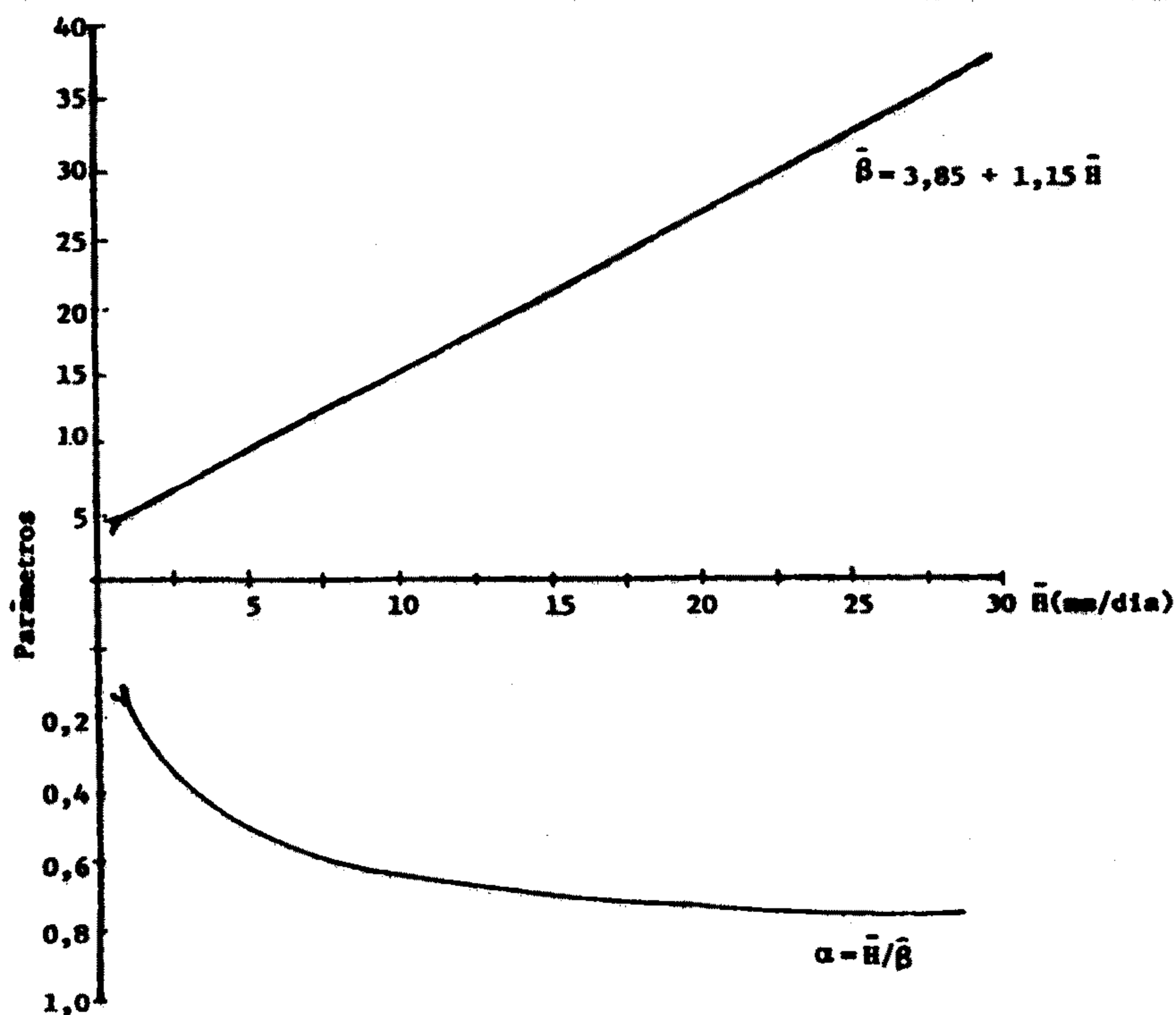


FIGURA 3 - Diagrama para determinação dos parâmetros de forma ($\hat{\alpha}$) e de escala ($\hat{\beta}$) da distribuição gama, em função das alturas médias de precipitação diária dos dias chuvosos (\bar{H}).

decisão, seja na operacionalização, seja no planejamento.

Diversos fatores dificultam a caracterização dessas distribuições nas regiões tropicais. Certamente dentre esses se relacionam a inexistência de registros históricos de dados diários de chuva e o reduzido número de postos climatológicos alocados nessas áreas.

Não obstante isso, há muitos aspectos dessas distribuições que podem ser revelados pelas análises de séries temporais de dados de chuva referentes a períodos de observação relativamente curtos

Quanto aos parâmetros da distribuição gama, observou-se relacionamento funcional entre os estimadores verossimilhanças do parâmetro de escala e as alturas médias mensais de precipitação dos dias chuvosos. Com efeito, esse relacionamento simplifica, consideravelmente, os procedimentos relativos à obtenção dos parâmetros da distribuição gama e conseqüentemente o ajustamento da distribuição de freqüências de totais diários de precipitação agrupados em períodos mensais.

Apesar de as estimativas dos parâmetros terem sido afetadas por redução no número de amostras referentes aos meses de estação seca (maio a outubro), os valores dos parâmetros de forma e de escala da distribuição gama, obtidos pelo procedimento, mostraram-se coerentes nos casos analisados.

Com referência às estimativas dos parâmetros para o ajustamento desses modelos, constatou-se a existência de uma relação (empírica) entre o parâmetro β (parâmetro de escala da distribuição gama) e as médias mensais das precipitações de dias chuvosos, que, aparentemente, foram independentes do tempo e do espaço. Com base nestes resultados, verificou-se a possibilidade de ajustar esses modelos a partir de sumários climatológicos mensais. Em termos práticos, isto representa reduções no número de dados meteorológicos necessários para obtenção dos parâmetros de forma e de escala da distribuição gama.

6. SUMMARY

(GAMMA PROBABILITY DENSITY FUNCTION PARAMETERS AS RELATED TO MONTHLY AVERAGE RAINFALL FOR RAINY DAYS)

This paper presents a study of gamma probability distribution parameters (α and β), estimated with the maximum likelihood method, related to the average monthly precipitation for rainy days (days with precipitation equal to or greater than 0.1 mm). The results showed that many aspects of the gamma distribution density function can be revealed by means of analysis of the rainfall data corresponding to relatively short

time series of those data. A functional relationship between the maximum likelihood estimator of the scale parameter of the gamma distribution density function and the monthly average precipitation for rainy days were observed. It was also shown that this relationship simplifies enormously the procedure to obtain the gamma distribution parameters to adjust the frequency distribution of daily amount of rainfall for monthly period. Although the estimated parameters have been influenced by the reduced number of data for the dry months period (May through October), the values of the scale and shape parameters, obtained by mean of that procedure, showed very exact consistency in all cases analyzed. An empirical relationship was observed between scale parameter and monthly average for rainy days, which apparently were independent of the location and time period.

7. LITERATURA CITADA

1. AZEVEDO, D. da C. *Chuvas no Brasil: regime, variabilidade e probabilidades mensais e anuais*. Brasília, Ministério da Agricultura/DNM, 1974. 41 p.
2. BERNARDO, S. *A computerized model to predict supplemental irrigation in tropical and subtropical climate*. Logan, Utah State University, 1975. 153 p. (Ph.D. Dissertation).
3. CASTRO NETO, P.; SEDIYAMA, G. C. & VILELA, E de A. Probabilidade de ocorrência de períodos chuvosos em Lavras, Minas Gerais. *Ciência e Prática*, 4: 56-65, 1988.
4. ESSENWANGER, O. M. *Elements of statistical analysis*. Amsterdam, Elsevier, 1986. 424 p. (World Survey of Climatology, Vol. IB).
5. GENG, S.; DE VRIES, F. W. P. P. & SUPIT, I. A simple method for generation daily rainfall data. *Agricultural and Forest Meteorology*, 36:363-376, 1986.
6. ISON, N. T.; FEYERHERM, A. M.; & BARK, L. D. Wet period and the gamma distribution. *Journal of Applied Meteorology*, 18:658-665, 1971.
7. LARSEN, G. A. & PENSE, R. B. Stochastic simulation of daily climatic data for agronomic models. *Agronomy Journal*, 74:518-524, 1982.
8. MAROUELLI, W.A. *Análise de distribuição das probabilidades de chuva. visando ao manejo da irrigação suplementar*. Viçosa, Imprensa Universitária, 1983. 123 p. (Tese MS).
9. NIMER, E. *Pluviometria e recursos hídricos de Pernambuco e Paraíba*. Rio de Janeiro, IBGE, 1979. 117 p.
10. SEDIYAMA, G. C.; CHANCELLOR, W. J.; BURKHARDT, T. H. & GOSS, J. R. Simulação de parâmetros climáticos para a época de crescimento das plantas. *Rev. Ceres*, 25:455-466, 1978.
11. THOM, H. C. S. A note on the gamma distribution. *Monthly Weather Review*, 86:117-122, 1958.
12. THOM, H. C. S. *Some methods of climatological analysis*. Geneve, WMO, 1966. 53 p. (Technical Note, 81).
13. WEAVER, M. & MILLER, M. E. *A precipitation probability computer program*. Ohio, Agricultural Research and Development Center, 1967. 10p. (Research Circular, 155).
14. YEVJEVICH, V. *Structure of daily hydrologic series*. Littleton, Water Resources Publications, 1984. 252 p.