Revista Ceres,46(266):383-409,1999.

# TESTE PARA VERIFICAR A IDENTIDADE DE MODELOS DE REGRESSÃO E A IGUALDADE DE PARÂMETROS NO CASO DE DADOS DE DELINEAMENTOS EXPERIMENTAIS[1]

Adair José Regazzi[2]

## 1. INTRODUÇÃO

Na análise estatística de experimentos em que os tratamentos são níveis crescentes de um fator quantitativo, como níveis de adubação, tempo, temperatura ou fungicida, o efeito de tratamento deve ser avaliado, em geral, por meio de uma análise de regressão, pois neste caso o uso de procedimentos para comparações múltiplas (testes de médias) não é indicado.

Alguns problemas têm aplicações importantes, como determinar se um conjunto de curvas é idêntico, se tem um intercepto comum ou se alguns dos parâmetros do modelo são os mesmos de modelo para modelo. Em muitos casos, o interesse maior está em saber se um conjunto de equações pode ser representado por uma equação comum.

NETER *et al.* (5) testaram se duas equações de regressão linear simples eram idênticas utilizando o teste F. Os pesquisadores comentaram que o teste pode ser aplicado para verificar a igualdade de duas equações de regressão polinomial ou de duas equações de regressão múltipla, desde que sejam feitas as modificações adequadas, e, ainda, que o teste pode ser

[1] Aceito para publicação em 06.05.1999.
[2] Departamento de Informática, Universidade Federal de Viçosa, 36571-000 Viçosa, MG (Bolsista do CNPq).

estendido, em caso de três ou mais equações. Eles mostraram, também, exemplos de comparação de parâmetros de equações de regressão.

GRAYBILL (*2*) apresentou um método para testar a hipótese de igualdade de um conjunto de modelos lineares, empregando o teste F. Como exemplo, citou o uso de fertilizantes em determinada cultura, onde se usa certo número de variedades e, para cada uma, obtém-se a relação entre a produção e a quantidade de fertilizante aplicada, mediante equações de regressão. Nesse caso, pode-se determinar se o aumento na produção, por unidade de fertilizante, é o mesmo para todas as variedades ou se a produção de cada variedade é a mesma na ausência de fertilizantes. Testes para verificar essas hipóteses foram apresentados.

STEEL e TORRIE (*9*) apresentaram testes para verificar a igualdade entre dois coeficientes de regressão e, também, entre mais de dois coeficientes de regressão linear simples.

REGAZZI (*8*) admitiu apenas um valor observado de Y para cada um de X, e considerou o ajuntamento de H equações de regressão polinomial de grau k, mediante o emprego da técnica dos polinômios ortogonais, em que apresentou, em detalhes, um método para testar as seguintes hipóteses: a) $H_0$: as H equações são idênticas; b) $H_0$: as H equações têm uma constante de regressão comum; e c) $H_0$: as equações têm um e/ou mais coeficientes de regressão iguais. Ele concluiu que o método apresentado é geral e pode ser usado em modelos polinomiais de qualquer grau, ortogonal ou não, e também em modelos de regressão múltipla.

Considerando o caso de dados provenientes de delineamentos experimentais (com repetições), o objetivo do presente trabalho foi apresentar um método para testar as mesmas hipóteses avaliadas por REGAZZI (*8*).

## 2. METODOLOGIA E RESULTADOS

### 2.1. *Dados provenientes de um delineamento inteiramente casualizado*

#### 2.1.1. *Preliminares*

Considere-se, inicialmente, um experimento com I tratamentos, sendo I níveis de um fator quantitativo, cada um com $r_i$ ($i = 1, 2, ..., I$) repetições, no delineamento inteiramente casualizado.

Do ponto de vista da Estatística Experimental, e considerando um modelo de regressão polinomial de grau k, dado por

QUADRO 1 - Esquema da análise da variância

| Fontes de Variação | G.L.[1/] |
|---|---|
| Regressão | k |
| Falta de ajustamento | I - k - 1 |
| Tratamentos | (I - 1) |
| Resíduo | n - I |
| Total | n - 1 |

[1/] $n = \sum_{i=1}^{I} r_i$

No Quadro 1, a fonte tratamentos foi decomposta em regressão e falta de ajustamento (ou desvios da regressão). Adotando-se este esquema, o teste F para regressão e também para falta de ajustamento tem o quadrado médio do resíduo ("erro puro") como denominador. É sempre desejável que a falta de ajustamento seja não-significativa, indicando ser apropriado o modelo linear utilizado.

Na prática ocorre, com certa freqüência, um resultado significativo para falta de ajustamento, mesmo testando diferentes modelos. Esta é uma situação embaraçosa. Uma recomendação que pode ser adotada em tais casos é, apesar desta restrição, optar pelo "melhor" modelo testado, sendo este escolhido baseado em outros critérios dentro das técnicas de diagnóstico de regressão.

O quadrado médio do resíduo estima a variância residual $\sigma^2$,.e o quadrado médio para falta de ajustamento estima a variância residual $\sigma^2$ se o modelo é correto e $\sigma^2$ + "viés" se ele não é apropriado. Assim, se a falta de ajustamento for não-significativa, pode-se adotar o esquema de análise apresentado no Quadro 2. Neste caso, tanto o quadrado médio do resíduo quanto o quadrado médio para a falta de ajustamento podem ser usados como estimativa da variância residual $\sigma^2$. Uma estimativa conjunta de $\sigma^2$, denominada quadrado médio do resíduo da regressão, é dada pela combinação das somas de quadrados do resíduo e da falta de ajustamento, dividida pela soma dos respectivos graus de liberdade. Assim, o teste F para regressão e para falta de ajustamento tem como denominador o quadrado médio do resíduo da regressão e o quadrado médio do resíduo, respectivamente. Para obter o resíduo da regressão no caso do delineamento inteiramente casualizado, basta considerar o modelo de regressão na forma $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$, com $\underset{\sim}{Y}$ sendo um vetor n x 1.

QUADRO 2 - Esquema da análise de variância

| Fontes de Variação | G.L. |
|---|---|
| Regressão | k |
| Resíduo da regressão | n - k - 1 |
| Falta de ajustamento | I - k - 1 |
| Resíduo | n - I |

Nos casos em que a falta de ajustamento é significativa, pode-se concluir que o modelo utilizado não é apropriado. Assim, o quadrado médio do resíduo da regressão não estimaria corretamente a variância residual ($\sigma^2$), pois estaria incluindo um erro sistemático, devido ao uso de um modelo inapropriado.

2.1.2. *Modelo Estatístico Completo*

Para o teste das três hipóteses de interesse, considere-se, inicialmente, H experimentos (H diferentes situações experimentais) conforme descritos em 2.1.1., em que cada um deles foi ajustada uma equação de regressão polinomial de segundo grau. As H equações são dadas por:

$$
\begin{aligned}
Y_{1i} &= a_1 + b_1 X_{1i} + c_1 X^2_{1i} + e_{1i} \;, \; i = 1, 2, ..., n_1 \\
Y_{2i} &= a_2 + b_2 X_{2i} + c_2 X^2_{2i} + e_{2i} \;, \; i = 1, 2, ..., n_2 \qquad (\alpha.1) \\
&\vdots \\
Y_{Hi} &= a_H + b_H X_{Hi} + c_H X^2_{Hi} + e_{Hi} \;, \; i = 1, 2, ..., n_H
\end{aligned}
$$

em que

$Y_{hi}$ = i-ésima observação do h-ésimo modelo, sendo $n_h$ (h = 1, 2, ... H) o número de observação do h-ésimo experimento;

$a_h$, $b_h$ e $c_h$ = os parâmetros do h-ésimo modelo;

$X_{hi}$ = i-ésimo valor da variável independente do h-ésimo modelo;

$e_{hi}$ = erro aleatório, associado a i-ésima observação do h-ésimo modelo, sendo suposto independente e normalmente distribuídos, com média zero e variância comum $\sigma^2$, isto é, $e_{hi} \sim NID(0, \sigma^2)$;

$$\sum_{h=1}^{H} n_h = N = \text{número total de observações.}$$

As hipóteses que serão consideradas são as seguintes:

a) $H_0$: $\underset{\sim}{\beta}_1 = \underset{\sim}{\beta}_2 = \ldots = \underset{\sim}{\beta}_H$, isto é, as H equações são idênticas.

em que $\underset{\sim}{\beta}_h = \begin{bmatrix} a_h \\ b_h \\ c_h \end{bmatrix}$;

b) $H_0$: $a_1 = a_2 = \ldots = a_H$, isto é, as H equações têm uma constante de regressão comum; e

c) $H_0$: $c_1 = c_2 = \ldots = c_H$, isto é, as H equações têm os coeficientes de regressão do termo de segundo grau iguais, ou $H_0$: $b_1 = b_2 = \ldots = b_H$ e $c_1 = c_2 = \ldots = c_H$, isto é, as H equações têm os coeficientes de regressão dos termos de primeiro e segundo graus iguais. (α.2)

O h-ésimo modelo em (α.1) pode ser escrito como:

$$\underset{\sim}{Y}_h = X_h \underset{\sim}{\beta}_h + \underset{\sim}{\varepsilon}_h, \qquad (\alpha.3)$$

em que

$$\underset{\sim}{Y}_h = {}_{n_h}\begin{bmatrix} Y_{h1} \\ Y_{h2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{hn_h} \end{bmatrix}_1, \quad X_h = {}_{n_h}\begin{bmatrix} 1 & X_{h1} & X_{h1}^2 \\ 1 & X_{h2} & X_{h2}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & X_{hn_h} & X_{hn_h}^2 \end{bmatrix}_p, \quad \underset{\sim}{\beta}_h = {}_p\begin{bmatrix} a_h \\ b_h \\ c_h \end{bmatrix}_1,$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_h = {}_{n_h}\begin{bmatrix} e_{h1} \\ e_{h2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{hn_h} \end{bmatrix}_1 \qquad (\alpha.4)$$

Escrevendo esses H modelos na forma do modelo linear geral $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$, tem-se que:

$$
{}_{N}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{Y}_1 \\ \underset{\sim}{Y}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{Y}_H \end{bmatrix}_1
\qquad
{}_{N}\begin{bmatrix} X_1 & \phi & \cdots & \phi \\ \phi & X_2 & \cdots & \phi \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi & \phi & & X_H \end{bmatrix}_{Hp}
\qquad
{}_{Hp}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\beta}_1 \\ \underset{\sim}{\beta}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\beta}_H \end{bmatrix}_1
$$

$$
\underset{\sim}{\varepsilon} = {}_{N}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_1 \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_H \end{bmatrix}_1 \qquad (\alpha.5)
$$

Evidentemente, $\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I)$. O sistema de equações normais, obtido pelo método dos mínimos quadrados, é $X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{Y}$, isto é:

$$
\begin{bmatrix} X_1'X_1 & \phi & \cdots & \phi \\ \phi & X_2'X_2 & \cdots & \phi \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi & \phi & & X_H'X_H \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{\beta}}_1 \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\underset{\sim}{\beta}}_H \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} X_1'\underset{\sim}{Y}_1 \\ X_2'\underset{\sim}{Y}_2 \\ \vdots \\ X_H'\underset{\sim}{Y}_H \end{bmatrix}
$$

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{Y} \qquad (\alpha.6)$$

e, ainda, sendo a matriz $(X'X)^{-1}$ bloco diagonal, onde cada bloco é a matriz inversa $(X'_hX_h)^{-1}$ de cada modelo, tem-se que ($\alpha$.6) pode ser escrito do seguinte modo:

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\hat{\beta}_1} \\ \underset{\sim}{\hat{\beta}_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{\hat{\beta}_H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'\underset{\sim}{Y}_1 \\ \left(X_2'X_2\right)^{-1}X_2'\underset{\sim}{Y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(X_H'X_H\right)^{-1}X_H'\underset{\sim}{Y}_H \end{bmatrix} \qquad (\alpha.7)$$

2.1.3. *Análise de variância relativa ao modelo completo*

Generalizando, considere-se o ajustamento de H modelos de regressão polinomial de grau k.

A soma de quadrados de parâmetros relativa ao modelo completo ($\alpha$.5) é dada por $SQPAR\,(c) = \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} = \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{\hat{\beta}}_h' X_h' \underset{\sim}{Y}_h$ ($\alpha$.8)

com Hp (H modelos , cada um com p parâmetros) graus de liberdade.

A soma de quadrados total não-corrigida é dada por

$$SQTOT\,(c) = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} = \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{Y}_h'\underset{\sim}{Y}_h \text{ com N graus de liberdade.} \qquad (\alpha.9)$$

A soma de quadrados do resíduo da regressão é obtida pela diferença entre ($\alpha$.9) e ($\alpha$.8), em que

$$SQRR\,(c) = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y}$$

$$= \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{Y}'_h \underset{\sim}{Y}_h - \sum_{h=1}^{H} \hat{\underset{\sim}{\beta}}'_h \underset{\sim}{X}'_h \underset{\sim}{Y}_h$$

$$= \sum_{h=1}^{H} \left( \underset{\sim}{Y}'_h \underset{\sim}{Y}_h - \hat{\underset{\sim}{\beta}}' \underset{\sim}{X}'_h \underset{\sim}{Y}_h \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{H} SQRR_h \text{ com N - Hp graus de liberdade, e} \qquad (\alpha.10)$$

$$SQRR_h = \underset{\sim}{Y}'_h \underset{\sim}{Y}_h - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'_h \underset{\sim}{X}'_h \underset{\sim}{Y}_h,$$

com $n_h$ - p graus de liberdade, é a soma de quadrados do resíduo da regressão relativo ao h-ésimo modelo, isto é, correspondente à análise de variância da regressão para a h-ésima equação.

O esquema da análise da variância relativa ao modelo completo está apresentado no Quadro 3.

QUADRO 3 - Esquema da análise de variância relativa ao modelo completo

| Fontes de Variação | G.L. | S.Q. | Q.M.* |
|---|---|---|---|
| Parâmetros ($\underset{\sim}{\beta}$) | Hp | $\hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}$ | |
| Resíduo da regressão | N - Hp | $\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}$ | QMRR = $\hat{\sigma}^2$ |
| Total | N | $\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y}$ | |

$$* \hat{\sigma}^2 = \frac{\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}}{N - Hp} = \frac{\sum_{h=1}^{H} SQRR_h}{N - Hp}$$

Na realidade, $\hat{\sigma}^2$ é o estimador comum da variância residual, que pode ser obtido pela média ponderada dos estimadores das variâncias residuais de cada modelo.

Uma vez que o modelo pressupõe homecedasticidade e a violação dessa pressuposição, em casos extremos, pode levar a erros graves nas conclusões, sua verificação poderá ser feita mediante um dos testes de homogeneidade de variâncias, como, por exemplo, o teste de Bartlett, citado por LI (*3*). Com base nos trabalhos de CONAGIN *et al.* (*1*) e NAGAI *et al.* (*4*), verifica-se que, dentro de certos limites, a heterogeneidade de variâncias não é assim um fator tão limitante. Por outro lado, conforme se verifica em PIMENTEL-GOMES (*6*), quando se tem uma relação de variâncias menor que sete é quase sempre possível combinar as variâncias residuais, obtendo-se uma estimativa comum. Esse fato pode ser estendido para o problema em questão e, quando esse quociente for além de sete, convirá considerar separadamente subgrupos de modelos, onde se tenha, dentro de cada subgrupo, uma razoável homogeneidade de variâncias.

2.1.4. *Testes Estatísticos*

Neste item, é apresentado o método com o esquema de análise para o teste das três hipóteses formuladas em ($\alpha$.2).

2.1.4.1. *Teste para verificar a igualdade de um conjunto de equações de regressão*

Sob a hipótese de nulidade,
$H_0$: $\underset{\sim}{\beta}_1 = \underset{\sim}{\beta}_2 = \ldots = \underset{\sim}{\beta}_H$ (as H equações são idênticas), os modelos em ($\alpha$.1) reduzem-se à forma

$$Y_{hi} = a + bX_{hi} + cX_{hi} + e_{hi} \qquad (\alpha.11)$$

em que $Y_{hi}$, $X_{hi}$ e $e_{hi}$ têm as mesmas especificações dos modelos em ($\alpha$.1)e a, b e c são os parâmetros comuns.

Utilizando a notação matricial, os modelos reduzidos ($\alpha$.11) podem ser escritos como

$$\underset{\sim}{Y} = Z\underset{\sim}{\theta} + \underset{\sim}{\varepsilon}, \qquad (\alpha.12)$$

em que
$\underset{\sim}{Y}$ = vetor dos valores observados da variável dependente, de dimensões

N x 1, igual a ($\alpha$.5);

$$Z = {}_N\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_H \end{bmatrix}_p$$ , em que $X_h$ com h = 1, 2, ... , H é igual a ($\alpha$.4)

$$\underset{\sim}{\theta} = {}_p\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_1$$ , que é o vetor dos parâmetros comuns; e

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ = vetor de erros aleatórios, de dimensões N x 1, igual a (α.5).

O sistema de equações normais relativo ao modelo reduzido (α.12), obtido pelo método dos mínimos quadrados, é $Z'Z\hat{\underset{\sim}{\theta}} = Z'\underset{\sim}{Y}$, isto é,

$$\left[\sum_{h=1}^{H} X_h' X_h\right] \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \left[\sum_{j=1}^{H} X_j' \underset{\sim}{Y}_j\right] \qquad (\alpha.13)$$

Sendo a matriz Z'Z de dimensões p x p e não-singular, o estimador do vetor de parâmetros comuns tem a seguinte expressão:

$$\hat{\underset{\sim}{\theta}} = (Z'Z)^{-1} Z' \underset{\sim}{Y} \qquad (\alpha.14)$$

Sendo a matriz Z'Z composta pela soma das matrizes $X'_h X_h$ de cada modelo, bem como a matriz $Z'\underset{\sim}{Y}$, o estimador do vetor dos parâmetros comuns pode ser escrito do seguinte modo:

$$\hat{\underset{\sim}{\theta}} = \left(\sum_{h=1}^{H} X_h' X_h\right)^{-1} \sum_{j=1}^{H} X_j' \underset{\sim}{Y}_j \qquad (\alpha.15)$$

A soma de quadrados de parâmetros, relativa ao modelo reduzido (α.12) é dada por:

$$SQPAR\,(r_1) = \hat{\underset{\sim}{\theta}}' Z' \underset{\sim}{Y}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{H} \underset{\sim}{Y}_j' \; X_j\right) \left(\sum_{h=1}^{H} X_h' X_h\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{H} X_t' \underset{\sim}{Y}_t\right)$$ com p graus de liberdade. (α.16)

A soma de quadrados total não-corrigida é dada igualmente por (α.9). Assim,

$$SQTOT\,(r_1) = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} = \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{Y}_h' \; \underset{\sim}{Y}_h$$, com N graus de liberdade. (α.17)

A soma de quadrados do resíduo da regressão relativa ao modelo reduzido é obtida pela diferença entre (α.17) e (α.16), em que:

$$SQRR(r_1) = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\hat{\theta}}'Z'\underset{\sim}{Y}$$

$$= \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{Y}_h' \underset{\sim}{Y}_h - \left(\sum_{j=1}^{H} \underset{\sim}{Y}_j' X_j\right)\left(\sum_{h=1}^{H} X_h' X_h\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{H} X_t' \underset{\sim}{Y}_t\right)$$

com N - p graus de liberdade. (α.18)

O teste estatístico para a hipótese $H_0$: $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_H$ (as H parâmetros do modelo completo.

Assim, a redução devida à hipótese $H_0$, denotada por Redução ($H_0$), é obtida pela diferença entre (α.8) e (α.16), ou seja:

Redução ($H_0$) = SQPAR(c) - SQPAR($r_1$)

$$= \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\hat{\theta}}'Z'\underset{\sim}{Y} \qquad (\alpha.19)$$

$$= \sum_{h=1}^{H} \underset{\sim}{\hat{\beta}}' X_h' \underset{\sim}{Y}_h - \underset{\sim}{\hat{\theta}}' \sum_{t=1}^{H} X_t' \underset{\sim}{Y}_t$$

com (H - 1) p graus de liberdade.

Para testar a hipótese

$H_0$: $\underset{\sim}{\beta}_1 = \underset{\sim}{\beta}_2 = .... = \underset{\sim}{\beta}_H$ (as H equações são idênticas)

vs $H_a$ : $\underset{\sim}{\beta}_i \neq \underset{\sim}{\beta}_j$ para pelo menos um $i \neq j$ (as H equações não são idênticas) utiliza-se a estatística F, dada por:

$$F_0 = \frac{[SQPAR(c) - SQPAR(r_1)] / (H-1)p}{SQRR(c) / (N - Hp)} \qquad (\alpha.20)$$

De acordo com GRAYBILL (*2*), na hipótese de nulidade $H_0$: $\underset{\sim}{\beta}_1 = \underset{\sim}{\beta}_2 = ...= \underset{\sim}{\beta}_H$, a estatística (α.20) apresenta distribuição F central, com (H - 1) p e (N - Hp) graus de liberdade.

O teste pode ser facilmente visualizado a partir do esquema da análise de variância apresentado no Quadro 4.

QUADRO 4 - Esquema da análise de variância relativa ao teste da hipótese $H_0$: $\underset{\sim}{\beta}_1 = \underset{\sim}{\beta}_2 = ... = \underset{\sim}{\beta}_H$ (as H equações são idênticas)

| Fontes de Variação | G.L. | S.Q. | Q.M. | $F_0$ |
|---|---|---|---|---|
| Parâmetros ($\underset{\sim}{\beta}$) | (Hp) | $Q_1 = \hat{\underset{\sim}{\beta}}' X' \underset{\sim}{Y}$ | | |
| Parâmetros ($\underset{\sim}{\theta}$) | p | $Q_2 = \hat{\underset{\sim}{\theta}}' \sum_{t=1}^{H} X_t' \underset{\sim}{Y}_t$ | | |
| Redução ($H_0$) | (H-1)p | $Q_3 = Q_1 - Q_2$ | $V_1 = \frac{Q_3}{(H-1)p}$ | $V_1/V_2$ |
| Resíduo da Regressão | N - Hp | $Q_4 = Q_5 - Q_1$ | $V_2 = \frac{Q_4}{N-Hp}$ | |
| Total | N | $Q_5 = \underset{\sim}{Y}' \underset{\sim}{Y}$ | | |

Assim, rejeita-se $H_0$ se e somente se $F_0 \geq F_{\alpha:(H-1)p,\, N-Hp}$,

em que $N = \sum_{h=1}^{H} n_h$.

A não-rejeição da hipótese $H_0$ permite concluir que, a uma significância $\alpha$, as H equações não diferem significativamente entre si. Assim, a equação ajustada com as estimativas dos parâmetros comuns pode ser usada como uma estimativa das H equações envolvidas.

2.1.4.2. *Teste para verificar se H equações de regressão têm uma constante de regressão comum*

O esquema da análise da variância relativa ao modelo completo é o mesmo apresentado no Quadro 3.

Sob a hipótese de nulidade:

$H_0$: $a_1 = a_2 = ... = a_H$ (as H equações têm uma constante de regressão comum), os modelos em ($\alpha$.1) reduzem-se à forma

$$Y_{hi} = a + b_h X_{hi} + c_h X_{hi} + e_{hi}, \qquad (\alpha.21)$$

em que $Y_{hi}$, $X_{hi}$, $b_h$, $c_h$ e $e_{hi}$ têm as mesmas especificações dos modelos em ($\alpha$.1), e $\underline{a}$ é o parâmetro comum.

A partição de $\underset{\sim}{\beta}_h$ e $X_h$ em ($\alpha$.4) é:

$$\underset{\sim}{\beta}_h = \begin{bmatrix} a_h \\ ---- \\ \underset{\sim}{\delta}_h \end{bmatrix}, \quad X_h = \left[\underset{\sim}{U}_h \,\vdots\, V_h\right],$$

em que $a_h$ é 1 x 1 e $\underset{\sim}{\delta}_h$ é (p - 1) x 1.

A seguir, é apresentado o teste estatístico para testar a hipótese

$H_0$: $a_1 = a_2 = \ldots = a_H = a$ (desconhecido)

Utilizando a notação matricial, os modelos reduzidos ($\alpha$.21) podem ser escritos como

$$\underset{\sim}{Y} = B\underset{\sim}{\gamma} + \underset{\sim}{\varepsilon} \quad , \qquad (\alpha.22)$$

em que $\underset{\sim}{Y}' = \left[\underset{\sim}{Y}_1', \underset{\sim}{Y}_2', \ldots, \underset{\sim}{Y}_H'\right]$

$$\underset{\sim}{\gamma}' = \left[a, \underset{\sim}{\delta}_1', \underset{\sim}{\delta}_2', \ldots, \underset{\sim}{\delta}_H'\right]$$

$$B = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{U}_1 & V_1 & \phi & \ldots & \phi \\ \underset{\sim}{U}_2 & \phi & V_2 & \ldots & \phi \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \underset{\sim}{U}_H & \phi & \phi & \ldots & V_H \end{bmatrix}$$

O sistema de equações normais, relativo ao modelo reduzido ($\alpha$.22), obtido pelo método dos mínimos quadrados, é:

$B'B\underset{\sim}{\widetilde{\gamma}} = B'\underset{\sim}{Y}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{H} \underset{\sim}{U}_i'\underset{\sim}{U}_i & \underset{\sim}{U}_1'V_1 & \underset{\sim}{U}_2'V_2 & \dots & \underset{\sim}{U}_H'V_H \\ V_1'\underset{\sim}{U}_1 & V_1'V_1 & \phi & \dots & \phi \\ V_2'\underset{\sim}{U}_2 & \phi & V_2'V_2 & \dots & \phi \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ V_H'\underset{\sim}{U}_H & \phi & \phi & \dots & V_H'V_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \underset{\sim}{\tilde{\delta}_1} \\ \underset{\sim}{\tilde{\delta}_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{\tilde{\delta}_H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{H} \underset{\sim}{U}_i'\underset{\sim}{Y}_i \\ V_1'\underset{\sim}{Y}_1 \\ V_2'\underset{\sim}{Y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_H'\underset{\sim}{Y}_H \end{bmatrix} \quad (\alpha.23)$$

Sendo a matriz B'B de dimensões [1+H(p-1)] x [1+H(p-1)] e não-singular, o estimador do vetor de parâmetros tem a seguinte expressão:

$$\underset{\sim}{\tilde{\gamma}} = (B'B)^{-1} B'\underset{\sim}{Y} \quad (\alpha.24)$$

A soma de quadrados de parâmetros relativa ao modelo reduzido ($\alpha$.22) é dada por:

$$\text{SQPAR } (r_2) = \underset{\sim}{\tilde{\gamma}}'B'\underset{\sim}{Y}. \quad (\alpha.25)$$

com 1 + H(p-1) graus de liberdade.

A soma de quadrados total não-corrigida foi dada em ($\alpha$.9), e a soma de quadrados do resíduo da regressão relativa ao modelo reduzido é dada por:

SQPAR $(r_2) = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\tilde{\gamma}}'B'\underset{\sim}{Y}$, com N - [1+ H(p - 1)] graus de liberdade.

A redução que $H_0$ provoca na soma de quadrados de parâmetros do modelo completo é dada por:

Redução $(H_0)$ = SQPAR (c) - SQPAR $(r_2)$

$= \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\tilde{\gamma}}'B'\underset{\sim}{Y}$, com H - 1 graus de liberdade.

Assim, para testar a hipótese,

$H_0 : a_1 = a_2 = ... = a_H$ (as equações têm uma constante de regressão comum).

vs Ha : $a_i \neq a_j$, para pelo menos um $i \neq j$, utiliza-se a estatística F dada por

$$F_0 = \frac{[SQPAR(c) - SQPAR(r_2)] / (H-1)}{SQRR(c) / (N - Hp)} \qquad (\alpha.26)$$

A uma significância $\alpha$, a decisão sobre o teste de $H_0$ vs $H_a$ é a seguinte: Rejeita-se $H_0$ se e somente se $F_0 \geq F_{\alpha:H-1,\ N-Hp}$. Em caso contrário, não se rejeita $H_0$.

Esse teste pode ser facilmente visualizado a partir do esquema da análise da variância apresentado no Quadro 5.

QUADRO 5 - Esquema da análise da variância relativa ao teste da hipótese $H_0$: $a_1 = a_2 = ... = a_H$ (as H equações têm uma constante de regressão comum)

| Fontes de Variação | G.L. | S.Q. | Q.M. | $F_0$ |
|---|---|---|---|---|
| Parâmetros ($\underset{\sim}{\beta}$) | (Hp) | $Q_1 = \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y}$ | | |
| Parâmetros ($\underset{\sim}{\gamma}$) | 1 + H(p-1) | $Q_2 = \tilde{\underset{\sim}{\gamma}}'B'\underset{\sim}{Y}$ | | |
| Redução ($H_0$) | H - 1 | $Q_3 = Q_1 - Q_2$ | $V_1 = \dfrac{Q_3}{H-1}$ | $V_1/V_2$ |
| Resíduo da Regressão | N - Hp | $Q_4 = Q_5 - Q_1$ | $V_2 = \dfrac{Q_4}{N-Hp}$ | |
| Total | N | $Q_5 = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y}$ | | |

2.1.4.3. *Teste para verificar se H equações de regressão tem um ou mais coeficientes de regressão iguais*

O esquema da análise da variância relativa ao modelo completo é o mesmo apresentado no Quadro 3.

Sob a hipótese de nulidade

$H_0 : c_1 = c_2 \dots = c_H$ (as H equações têm os coeficientes de regressão do termo de segundo grau iguais), $(\alpha.27)$

os modelos em ($\alpha$.1) reduzem-se à forma

$$Y_{hi} = a_h + b_h X_{hi} + cX_{hi} + e_{hi,} \qquad (\alpha.28)$$

em que $Y_{hi}$, $X_{hi}$, $a_h$, $b_h$ e $e_{hi}$ têm as mesmas especificações dos modelos em ($\alpha$.1) e $\underline{c}$ é o parâmetro comum.

A partição de $\underset{\sim}{\beta}_h$ e $X_h$ em ($\alpha$.4), generalizando para p parâmetros, é:

$$\underset{\sim}{\beta}_h = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\alpha}_h \\ ---- \\ \underset{\sim}{\psi}_h \end{bmatrix}, \quad X_h = [U_h \mid V_h]$$

em que $\underset{\sim}{\beta}_h$ é um vetor p x 1, $\underset{\sim}{\alpha}_h$ é $p_1$ x 1 $(0 < p_1 < p)$ e $\underset{\sim}{\psi}_h$ é $p_2$ x 1 $(p_2 = p - p_1)$.

A seguir, é dado o teste estatístico para testar a hipótese

$$H_0: \underset{\sim}{\psi}_1 = \underset{\sim}{\psi}_2 = \ldots = \underset{\sim}{\psi}_H = \underset{\sim}{\psi} \quad \text{(desconhecido)} \qquad (\alpha.29)$$

Evidentemente, a hipótese em (α.27) é um caso particular da hipótese formulada em (α.29).

Utilizando a notação matricial, o modelo reduzido pode ser escrito como

$$\underset{\sim}{Y} = W\underset{\sim}{\Gamma} + \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad (\alpha.30)$$

em que:

$$\underset{\sim}{Y}' = \left[ \underset{\sim}{Y}_1', \ \underset{\sim}{Y}_2' \ \ldots \ \underset{\sim}{Y}_H' \right]$$

$$\underset{\sim}{\Gamma}' = \left[ \underset{\sim}{\alpha}_1', \ \underset{\sim}{\alpha}_2', \ \ldots, \ \underset{\sim}{\alpha}_H', \ \underset{\sim}{\psi}' \right] \text{ e}$$

$$W = \begin{bmatrix} U_1 & \phi \ \ldots & \phi & V_1 \\ \phi & U_2 \ \ldots & \phi & V_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi & \phi \ \ldots & U_H & V_H \end{bmatrix}$$

O sistema de equações normais relativo ao modelo reduzido (α.30), obtido pelo método dos mínimos quadrados, é

$W'W\underset{\sim}{\widetilde{\Gamma}} = W'\underset{\sim}{Y}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} U_1'U_1 & \phi & \ldots & \phi & U_1'V_1 \\ \phi & U_2'U_2 & \ldots & \phi & U_2'V_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \phi & \phi & \ldots & U_H'U_H & U_H'V_H \\ V_1'U_1 & V_2'U_2 & \ldots & V_H'U_H & \sum_{i=1}^{H} V_i'V_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underset{\sim}{\alpha}}_1 \\ \tilde{\underset{\sim}{\alpha}}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{\underset{\sim}{\alpha}}_H \\ \tilde{\underset{\sim}{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \underset{\sim}{Y}_1 \\ U_2' \underset{\sim}{Y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_H' \underset{\sim}{Y}_H \\ \sum_{i=1}^{H} V_i' \underset{\sim}{Y}_i \end{bmatrix} \qquad (\alpha.31)$$

Sendo a matriz W'W de dimensões $(Hp_1 + p_2) \times (Hp_1 + p_2)$ e não-singular, o estimador do vetor de parâmetros tem a seguinte expressão:

$$\tilde{\underset{\sim}{\Gamma}} = (W'W)^{-1} W' \underset{\sim}{Y} \qquad (\alpha.32)$$

A soma de quadrados de parâmetros relativa ao modelo reduzido ($\alpha$.30) é dada por:

$$\text{SQPAR}(r_3) = \tilde{\underset{\sim}{\Gamma}}' W' \underset{\sim}{Y}, \qquad (\alpha.33)$$

com $Hp_1 + p_2$ graus de liberdade.

A soma de quadrados total não-corrigida é dada em ($\alpha$.9), e a soma de quadrados do resíduo da regressão relativa ao modelo reduzido é dada por:

$$\text{SQRR}(r_3) = \underset{\sim}{Y}' \underset{\sim}{Y} - \tilde{\underset{\sim}{\Gamma}}' W' \underset{\sim}{Y} \qquad (\alpha.34)$$

com $N - (Hp_1 + p_2)$ graus de liberdade.

A redução que $H_0$ provoca na soma de quadrados de parâmetros do modelo completo é dada por:

Redução $(H_0)$ = SQPAR(c) - SQPAR $(r_3)$

$= \hat{\underset{\sim}{\beta}}' X' \underset{\sim}{Y} - \tilde{\underset{\sim}{\Gamma}}' W' \underset{\sim}{Y}$, com $(H - 1)p_2$ graus de liberdade.

Assim, para testar a hipótese

$H_0$: $\underset{\sim}{\psi}_1 = \underset{\sim}{\psi}_2 = \ldots \underset{\sim}{\psi}_H = \underset{\sim}{\psi}$ (desconhecido) vs $H_a$: $\underset{\sim}{\psi}_h \neq \underset{\sim}{\psi}_{h'}$, para pelo menos um $h \neq h' = 1, 2, ..., H$, utiliza-se a estatística F, dada por:

$$F_0 = \frac{[SQPAR(c) - SQPAR(r_3)] / (H-1)p_2}{SQRR(c) / (N - Hp)} \qquad (\alpha.35)$$

A uma significância $\alpha$, a decisão sobre o teste de $H_0$ vs $H_a$ é a seguinte: Rejeita-se $H_0$ se e somente se $F_0 \geq F_{\alpha:(H-1)p_2, N-Hp}$. Em caso contrário, não se rejeita $H_0$.

O teste pode ser facilmente visualizado a partir do esquema da análise da variância apresentado no Quadro 6.

QUADRO 6 - Esquema da análise da variância relativa ao teste da hipótese $H_0$: $\underset{\sim}{\psi}_1 = \underset{\sim}{\psi}_2 = ... = \underset{\sim}{\psi}_H$ [1/]

| Fontes de Variação | G.L. | S.Q. | Q.M. | F |
|---|---|---|---|---|
| Parâmetros ($\underset{\sim}{\beta}$) | (Hp) | $Q_1 = \hat{\underset{\sim}{\beta}}' X' \underset{\sim}{Y}$ | | |
| Parâmetros ($\underset{\sim}{\Gamma}$) | $Hp_1 + p_2$ | $Q_2 = \tilde{\underset{\sim}{\Gamma}}' W' \underset{\sim}{Y}$ | | |
| Redução ($H_0$) | $(H-1)p_2$ | $Q_3 = Q_1 - Q_2$ | $V_1 = \frac{Q_3}{(H-1)p_2}$ | $V_1/V_2$ |
| Resíduo da regressão | N - Hp | $Q_4 = Q_5 - Q_1$ | $V_2 = \frac{Q_4}{N - Hp}$ | |
| Total | N | $Q_5 = \underset{\sim}{Y}' \underset{\sim}{Y}$ | | |

[1] Esse teste é geral, isto é, pode testar a igualdade de um, alguns ou todos os coeficientes de regressão do modelo.

## 2.2. *Dados provenientes de um delineamento em blocos casualizados completos*

Considerando um experimento como descrito em 2.1.1., porém com $r_i = r$ para todo i, com os I tratamentos em blocos casualizados completos, tem-se o esquema usual da análise da variância apresentado no Quadro 7.

| QUADRO 7 - Esquema da análise da variância | |
|---|---|
| Fontes de Variação | G.L.[1] |
| Regressão | k |
| Falta de ajustamento | I - k - 1 |
| Tratamentos | I - 1 |
| Blocos | r- 1 |
| Resíduo | (I - 1) (r - 1) |
| Total | n - 1 |
| [1] n = Ir | |

Conforme foi comentado em 2.1.1., se a falta de ajustamento for não-significativa, pode-se adotar o esquema de análise apresentado no Quadro 8. Neste caso, o teste F para regressão e para falta de ajustamento, tem como denominador o quadrado médio do resíduo da regressão e o quadrado médio do resíduo, respectivamente.

| QUADRO 8 - Esquema da análise da variância | |
|---|---|
| Fontes de Variação | G.L. |
| Regressão | k |
| Resíduo de regressão | n - k - r |
| Blocos | r - 1 |
| Falta de ajustamento | I - k - 1 |
| Resíduo | (I - 1) (r - 1) |

Considerando o modelo de regressão na forma $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$, com $\underset{\sim}{Y}$ sendo um vetor n x 1, a soma de quadrados do resíduo da regressão para o h-ésimo modelo (h = 1, 2, ..., H) é dada por:

$$SQRR_h = \underset{\sim}{Y}'_h \underset{\sim}{Y}_h - \underset{\sim}{\hat{\beta}}'_h X'_h \underset{\sim}{Y}_h - SQBlocos_h .$$

A derivação para o teste das três hipóteses formuladas é análoga ao que foi desenvolvido para o delineamento inteiramente casualizado. Admitindo a homocedasticidade, tem-se que o quadrado médio do resíduo da regressão para o modelo completo é dado por:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{h=1}^{H} SQRR_h}{N - Hp - H(r-1)} = \frac{\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} - \sum_{h=1}^{H} SQBlocos_h}{N - Hp - H(r-1)}$$

## 3. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO

### 3.1. *Delineamento inteiramente casualizado*

Julgou-se adequada a ilustração dos resultados obtidos neste estudo. Consideraram-se quatro experimentos (quatro variedades de uma determinada cultura), onde cada um era constituído por sete tratamentos no delineamento inteiramente casualizado com três repetições, cujas médias de produção estão apresentadas no Quadro 9.

QUADRO 9 - Médias de produção (kg/parcela) de quatro variedades em sete níveis de adubação

| Variedades | Níveis de adubação (kg/ha) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 |
| 1 | 81,3 | 110,4 | 227,5 | 261,7 | 268,7 | 250,7 | 190,7 |
| 2 | 139,4 | 157,7 | 220,2 | 305,0 | 283,2 | 249,9 | 216,2 |
| 3 | 68,0 | 166,5 | 216,7 | 265,5 | 297,0 | 214,9 | 199,6 |
| 4 | 92,0 | 160,4 | 250,7 | 253,5 | 300,7 | 254,7 | 228,1 |

Os quadrados médios do resíduo ("erro puro") para os experimentos 1, 2, 3 e 4 foram 768,2560; 1191,4640; 782,3754 e 650,4109, respectivamente. Considerando o modelo polinomial do segundo grau, efetuou-se a análise da variância da regressão para cada experimento, com o objetivo de se testar a falta de ajustamento. Optou-se pela regressão polinomial apenas para mostrar os resultados numéricos, pois uma condição básica para estudos de regressão são as propriedades matemáticas das funções utilizadas, e segundo PIMENTEL-GOMES e CONAGIN (7), regressões polinomiais, principalmente de terceiro e de quarto graus não têm propriedades matemáticas adequadas para representar o comportamento dos dados de ensaios de adubação. Uma vez que para as quatro análises o teste para a falta de ajustamento foi não-significativo em nível de 5% de probabilidade, obtiveram-se os resíduos da regressão para aplicação do teste de homogeneidade de variâncias, cujos resultados estão apresentados no Quadro 10.

QUADRO 10 - Resumo da análise de variância da regressão e do teste de homogeneidade de variâncias

| Fontes de Variação | G.L | Quadrados Médios | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Variedade 1 | Variedade 2 | Variedade 3 | Variedade 4 |
| Parâmetros | 3 | 307948,0234 | 371793,8499 | 322127,9955 | 367360,9566 |
| Resíduo da regressão | 18 | 1015,8052 | 1495,9492 | 924,9416 | 716,8974 |

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 \rightarrow \begin{array}{l} \chi^2_{obs.} = 2{,}522 \text{ n.s.} \\ \chi^2_{tab.}\ (5\%;3) = 7{,}815 \end{array}$$

n.s. Não-significativo (P > 0,05), pelo teste de Bartlett

Assim, a hipótese de homogeneidade de variâncias não foi rejeitada ($P > 0,05$). São apresentados a seguir os testes para as três hipóteses formuladas.

### 3.1.1. *Teste para verificar a igualdade das equações de regressão*

As equações ajustadas mediante o emprego da técnica dos polinômios ortogonais estão apresentadas no Quadro 11, e as equações descodificadas, no Quadro 12.

O teste da hipótese $H_0 : \underset{\sim}{\beta}_1 = \underset{\sim}{\beta}_2 = \underset{\sim}{\beta}_3 = \underset{\sim}{\beta}_4$, isto é, quatro equações idênticas, está apresentado no Quadro 13.

Com base no teste apresentado no Quadro 13, a hipótese $H_0$ não foi rejeitada, concluindo-se que as quatro equações não diferem, estatisticamente, a 5% de probabilidade. Assim, a equação comum pode ser usada como uma estimativa das quatro equações envolvidas.

É importante ressaltar que, para a hipótese que acabou de ser testada, trabalhando com o modelo ortogonal (estimadores dos parâmetros não-correlacionados), ou não, os resultados são idênticos ao apresentado no Quadro 13. Uma vantagem de se trabalhar com o modelo ortogonal está no fato de que as matrizes X'X são diagonais.

### 3.1.2. *Teste para verificar se as equações de regressão têm uma constante de regressão comum*

Os resultados do teste para verificar se as quatro equações de regressão têm uma constante de regressão comum está apresentado no Quadro 14, concluindo-se pela rejeição da hipótese de nulidade ($P < 0,05$).

QUADRO 11 - Equações de regressão ajustadas mediante o emprego da técnica dos polinômios ortogonais[1/]

| Variedades | Equações Ajustadas | $R^2$ (%) |
|---|---|---|
| 1 | $\hat{Y}_{1i} = 198,7143 + 23,2143\, x_i - 13,9928\,(X_i^2 - 4)$ | 92,6 |
| 2 | $\hat{Y}_{2i} = 224,5143 + 17,0643\, x_i - 11,3357\,(X_i^2 - 4)$ | 84,7 |
| 3 | $\hat{Y}_{3i} = 204,0286 + 20,4250\, x_i - 15,0607\,(X_i^2 - 4)$ | 94,2 |
| 4 | $\hat{Y}_{4i} = 220,0143 + 23,1036\, x_i - 12,7107\,(X_i^2 - 4)$ | 95,7 |
| Comum | $\hat{Y}_{i} = 211,8178 + 20,9518\, x_i - 13,2750\,(X_i^2 - 4)$ | 88,8 |

[1/] $x_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{q} = \dfrac{X_i - 90}{30}$ ; os estimadores dos parâmetros são não-correlacionados.

$R^2$ expressos em relação à fonte de tratamentos.

| QUADRO 12 - Equações de regressão ajustadas expressas na variável original X | | |
|---|---|---|
| Variedades | Equações Ajustadas | $R^2$ (%) |
| 1 | $\hat{Y}_{1i} = 59{,}1074 + 3{,}5724\,X_i - 0{,}015547\,X_i^2$ | 92,6 |
| 2 | $\hat{Y}_{2i} = 116{,}6429 + 2{,}8359\,X_i - 0{,}012595\,X_i^2$ | 84,7 |
| 3 | $\hat{Y}_{3i} = 67{,}4501 + 3{,}6930\,X_i - 0{,}016734\,X_i^2$ | 94,2 |
| 4 | $\hat{Y}_{4i} = 87{,}1500 + 3{,}3123\,X_i - 0{,}014123\,X_i^2$ | 95,7 |
| Comum | $\hat{Y}_i = 82{,}5874 + 3{,}3534\,X_i - 0{,}014750\,X_i^2$ | 88,8 |

QUADRO 13 - Análise da variância relativa ao teste da hipótese $H_0$ : $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_3 = \tilde{\beta}_4$ (as quatro equações são idênticas)

| Fontes de Variação | G.L. | S.Q. | Q.M. | F |
|---|---|---|---|---|
| Parâmetros ($\tilde{\beta}$) | (12) | (4107692,4762) | | |
| Parâmetros ($\tilde{\theta}$) | 3 | 4093942,4814 | | |
| Redução ($H_0$) | 9 | 13749,9948 | 1527,7772 | 1,47 n.s. |
| Resíduo da regressão | 72 | 74764,6820 | 1038,3984 | |
| Total | 84 | 4182457,1582 | | |

n.s. Não-significativo (P> 0,05).

É interessante ressaltar que no modelo ortogonal (Quadro 11) tem-se $\hat{a}_h = \overline{Y}_h$, portanto o teste apresentado no Quadro 14 testa a igualdade das constantes dos modelos apresentados no Quadro 11. Naturalmente, um teste para a igualdade das constantes de regressão dos modelos apresentados no Quadro 12 daria um resultado diferente do apresentado no Quadro 14, isso porque as hipóteses seriam diferentes. O método é o mesmo tanto num caso quanto no outro, pois o importante é saber o que está sendo testado.

QUADRO 14 - Análise da variância relativa ao teste da hipótese $H_0$: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ (as quatro equações têm uma constante de regressão comum)

| Fontes de Variação | G.L. | S.Q. | Q.M. | F |
|---|---|---|---|---|
| Parâmetros ($\tilde{\beta}$) | (12) | (4107692,4762) | | |
| Parâmetros ($\tilde{\gamma}$) | 9 | 4098015,2406 | | |
| Redução ($H_0$) | 3 | 9677,2356 | 3225,7452 | 3,11* |
| Resíduo da regressão | 72 | 74764,6820 | 1038,3984 | |
| Total | 84 | 4182457,1582 | | |

* Significativo (P< 0,05)

3.1.3. *Teste para verificar se as equações de regressão têm os coeficientes de regressão do termo de segundo grau iguais*

O resultado do teste para verificar se as quatro equações de regressão têm os coeficientes de regressão do termo de segundo grau iguais está apresentado no Quadro 15, concluindo-se pela não-rejeição da hipótese de nulidade.

QUADRO 15 - Análise da variância relativa ao teste da hipótese $H_0 : c_1 = c_2 = c_3 = c_4$ (as quatro equações têm os coeficientes do termo de segundo grau iguais)

| Fontes de Variação | G.L. | S.Q. | Q.M. | F |
|---|---|---|---|---|
| Parâmetros ($\underset{\sim}{\beta}$) | (12) | (4107692,4762) | | |
| Parâmetros ($\underset{\sim}{\Gamma}$) | 9 | 4105731,4167 | | |
| Redução ($H_0$) | 3 | 1961,0595 | 653,6865 | < 1 n.s. |
| Resíduo da regressão | 72 | 74764,6820 | 1038,3984 | |
| Total | 84 | | | |

n.s. Não-significativo (P> 0,05).

Para o teste apresentado no Quadro 15, utilizando-se os modelos dos Quadros 11 ou 12, os resultados são exatamente os mesmos, pois os coeficientes diferem apenas pela constante $q^2$, o que não altera o teste. Isso é sempre verdadeiro para o termo de mais alto grau, pois testes para coeficientes de termos inferiores darão resultados diferentes, porque estariam testando hipóteses diferentes.

3.2. *Delineamento em blocos casualizados completos*

Considerando os dados dos experimentos descritos em 3.1. como sendo provenientes do delineamento em blocos casualizados completos, obtiveram-se as somas de quadrados apresentados no Quadro 16.

QUADRO 16 - Número de graus de liberdade e somas de quadrados para blocos e resíduo

| | Blocos | | Resíduo | |
|---|---|---|---|---|
| Variedades | G.L. | S.Q. | G.L. | S.Q. |
| 1 | 2 | 3454,2348 | 12 | 7301,3492 |
| 2 | 2 | 4723,4254 | 12 | 11957,0706 |
| 3 | 2 | 3128,4590 | 12 | 7824,7966 |
| 4 | 2 | 2945,6428 | 12 | 6160,1098 |

Considerando o modelo polinomial do segundo grau, o teste para a falta de ajustamento foi não-significativo (P> 0,05) para as quatro análises. O resumo da análise da variância da regressão e do teste de homogeneidade de variâncias está apresentado no Quadro 17.

QUADRO 17 - Resumo da análise da variância da regressão e do teste de homogeneidade de variâncias

| Fontes de Variação | Quadrados Médios | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | G.L. | Variedade 1 | Variedade 2 | Variedade 3 | Variedade 4 |
| Blocos | 2 | 1727,1174 | 2361,7127 | 1564,2295 | 1472,8214 |
| Parâmetros | 3 | 307948,0234 | 371793,8499 | 322127,9955 | 367360,9566 |
| Resíduo da regressão | 16 | 926,8912 | 1387,7288 | 845,0306 | 622,4069 |

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 \rightarrow$ $\chi^2_{obs.} = 2{,}599$ n.s. $\chi^2_{tab.}$ (5%;3) = 7,815

n.s. Não-significativo (P > 0,05) pelo teste de Bartlett.

Nos Quadros 18, 19 e 20 são apresentados os testes para as três hipóteses formuladas.

QUADRO 18 - Análise da variância relativa ao teste da hipótese $H_0$: $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_3 = \tilde{\beta}_4$ (as quatro equações são idênticas)

| Fontes de Variação | G.L. | S.Q. | Q.M. | F |
|---|---|---|---|---|
| Parâmetros ($\tilde{\beta}$) | (12) | (4107692,4762) | | |
| Parâmetros ($\tilde{\theta}$) | 3 | 4093942,4814 | | |
| Redução ($H_0$) | 9 | 13749,9948 | 1527,7772 | 1,61 n.s. |
| Resíduo da regressão | 64 | 60512,9200 | 945,5144 | |

n.s. Não-significativo (P> 0,05).

QUADRO 19 - Análise da variância relativa ao teste da hipótese $H_0$: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ (as quatro equações têm uma constante de regressão comum)

| Fontes de Variação | G.L. | S.Q. | Q.M. | F |
|---|---|---|---|---|
| Parâmetros ($\tilde{\beta}$) | (12) | (4107692,4762) | | |
| Parâmetros ($\tilde{\gamma}$) | 9 | 4098015,2406 | | |
| Redução ($H_0$) | 3 | 9677,2356 | 3225,7452 | 3,41* |
| Resíduo da regressão | 64 | 60512,9200 | 945,5144 | |

* Significativo (P < 0,05).

QUADRO 20 - Análise da variância relativa ao teste da hipótese $H_0$: $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$ (as quatro equações têm os coeficientes do termo de segundo grau iguais)

| Fontes de Variação | G.L. | S.Q. | Q.M. | F |
|---|---|---|---|---|
| Parâmetros ($\underset{\sim}{\beta}$) | (12) | (4107692,4762) | | |
| Parâmetros ($\underset{\sim}{\Gamma}$) | 9 | 4105731,4167 | | |
| Redução ($H_0$) | 3 | 1961,0595 | 653,6865 | < 1 n.s. |
| Resíduo da regressão | 64 | 60512,9200 | 945,5144 | |

n.s. Não-significativo (P> 0,05).

Por mera coincidência, as conclusões obtidas para os três testes, considerando-se o delineamento em blocos casualizados, foram idênticas àquelas obtidas para o delineamento inteiramente casualizado.

## 4. CONCLUSÕES

1. A identidade de modelos de regressão e igualdade de qualquer subconjunto de parâmetros pode ser verificada por meio do teste F.
2. A metodologia apresentada é geral e pode ser usada em modelos polinomiais de qualquer grau e também em modelos de regressão múltipla.

## 5. RESUMO

Neste trabalho, foi considerado o ajustamento de H equações de regressão polinomial de grau k, supondo dados provenientes de delineamentos experimentais. O modelo linear para a h-ésima equação é $\underset{\sim}{Y}_h = X_h\underset{\sim}{\beta}_h + \underset{\sim}{\varepsilon}_h$, em que $\underset{\sim}{Y}_h$ é um vetor $n_h$ x 1 de realizações de variáveis aleatórias, $X_h$ uma matriz $n_h$ x p de constantes conhecidas, $\underset{\sim}{\beta}_h$ um vetor p x 1 de parâmetros desconhecidos e $\underset{\sim}{\varepsilon}_h$ um vetor $n_h$ x 1 de erros aleatórios supostos NID ($\underset{\sim}{\varepsilon}_h$ : $\underset{\sim}{0}$, $I\sigma^2$). Na estimação dos parâmetros, utilizou-se o método dos mínimos quadrados. As três hipóteses consideradas foram: a) $H_0$ : as H equações são idênticas; b) $H_0$: as H equações têm uma constante de regressão comum; c) $H_0$: as H equações têm um ou mais coeficientes de regressão iguais. Para verificação das três hipóteses foi dada uma derivação, chegando-se ao teste F. Como ilustração, esse método foi aplicado a um conjunto de H = quatro equações de regressão polinomial de segundo grau. A metodologia apresentada é

geral e pode ser usada em modelos polinomiais de qualquer grau e também em modelos de regressão múltipla.

## 6. SUMMARY


### (IDENTITY TEST FOR REGRESSION MODELS AND PARAMETER EQUALITY BASED ON EXPERIMENTAL DESIGN DATA)

In this paper, the adjustment of H equations of regression of k degree was considered, based on data taken from experimental design. The linear model for the $h^{th}$ equation is $\underset{\sim}{Y}_h = X_h \underset{\sim}{\beta}_h + \underset{\sim}{\varepsilon}_h$, where $\underset{\sim}{Y}_h$ is an $n_h$ x 1 vector of observations, $X_h$ is an $n_h$ x p matrix of known constant, $\underset{\sim}{\beta}_h$ is an p x 1 vector of unknown parameters and $\underset{\sim}{\varepsilon}_h$ is an $n_h$ x 1 vector of error that is distributed N ($\underset{\sim}{\varepsilon}_h$ : $\underset{\sim}{0}$, $I\sigma^2$). In the estimation of parameters, the Least Square Method was used. The three hypotheses were: a) $H_0$: The H equations are identical; b) $H_0$: The H equations have a common constant regression and c) $H_0$: The H equations have one or more equal regression coefficients. An appropriate derivation was used to verify the three hypotheses resulting in the F test. This methodology was applied in a set of H = 4 polynomial regression equation of second degree. The methodology presented is general and can be used in polynomial models of any degree and also in multiple regression models.


## 7. LITERATURA CITADA


1. CONAGIN, A.; NAGAI, V. & IGUE, T. Poder discriminativo de diferentes testes de comparação de médias. *Revista de Agricultura, 65*: 203-214, 1990.
2. GRAYBILL, F. A. *Theory and application of the linear model*. Belmont, Duxbury Press, 1976. 704 p.
3. LI, J. C. R. *Statistical inference*. Ann. Arbor, Edwards Brothers, Inc., 1964. Vol. I, 658 p.
4. NAGAI, V.; CONAGIN, A. & IGUE, T. Sensibilidade de diferentes testes de homogeneidade das variâncias. *Revista de Agricultura, 66*: 65-76, 1991.
5. NETER, J.; WASSERMAN, W. & KUTNER, M. H. *Applied linear statistical models. Regression, analysis of variance and experimental designs*. 2ª ed. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1985. 1127 p.
6. PIMENTEL-GOMES, F. *Curso de estatística experimental*. 13ª ed. Piracicaba, Livraria Nobel, 1990. 468 p.
7. PIMENTEL-GOMES, F. & CONAGIN, A. *Métodos de pesquisa em fertilidade do solo*. Brasília, EMBRAPA, 1991. 392p.

8. REGAZZI, A. J. Teste para verificar a identidade de modelos de regressão e a igualdade de alguns parâmetros num modelo polinomial ortogonal. *Revista Ceres, 40*: 176-195, 1993.
9. STEEL, R. G. D. & TORRIE, J. H. *Principles and procedures of statistics*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1980. 633 p.