DETERMINANTE FUNCIONAL OU JACOBIANO DE FUNÇÕES

ANTÔNIO GONÇALVES DE OLIVEIRA (*)

Dadas n funções deriváveis de n variáveis independentes:

$$y_1 = f_1\,(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n)$$
$$y_2 = f_2\,(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = f_n\,(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n),$$

chama-se determinante funcional ou jacobiano das n funções ao determinante de ordem n:

$$J \begin{vmatrix} \frac{\partial f1}{\partial u_1} & \frac{\partial f1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f2}{\partial u_1} & \frac{\partial f2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f n}{\partial u_1} & \frac{\partial f n}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

formado com as derivadas parciais, de primeira ordem, de cada uma das funções, em relação às variáveis $u_1,\ u_2\ \ldots\ u_n$. O símbolo que adotamos é o seguinte:

$$J = \frac{\partial\,(f_1,\ f_2\ \ldots\ f_u)}{\partial\,(u_1,\ u_2\ \ldots\ u_u)}$$

APLICAÇÕES

Sejam as seguintes funções:

$$x = P \cos \varphi$$
$$y = P \text{ sen } \varphi$$

$$J = \frac{\partial\,(x,\ y)}{\partial\,(P,\ \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & - P \text{ seu } \varphi \\ \text{sen } \varphi & P \cos \varphi \end{vmatrix}$$

(*) Prof. Adjunto da U. R. E. M. G.

A 1ª linha do determinante de 2ª ordem é constituída das derivadas de x em relação a P e a φ. A 2ª linha é formada pelas derivadas de y, em relação a P e a φ.

Calculando o determinante, encontramos: $P \cos^2 \varphi + P \operatorname{sen}^2 \varphi = P(\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) = P$.

$$x = P \cos \Theta$$
$$y = P \operatorname{sen} \Theta$$
$$z = z$$

$$J = \frac{\delta (x, y, z)}{\delta (P, \Theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \Theta & - P \operatorname{sen} \Theta & 0 \\ \operatorname{sen} \Theta & P \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = P$$

$$u = C^{\frac{3x}{y}}$$

$$v = L y - L x$$

$$J = \frac{\delta (u, v)}{\delta (x, y)} = \begin{vmatrix} C^{\frac{3x}{y}} \cdot \frac{3}{y} & C^{\frac{3x}{y}} \cdot \frac{-3x}{y^2} \\ - \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \end{vmatrix}$$

$$= C^{\frac{3x}{y}} \cdot \frac{3}{y} \left[\frac{-1}{y}\right] - C^{\frac{3x}{y}} \cdot \frac{3x}{y^2} \cdot \frac{1}{x} = 0$$

O determinante funcional é muito empregado na Análise Infinitesimal, e mormente para fazer certas mudanças de variáveis, necessárias à simplificação dos cálculos.

Resolução de Integrais

$$1) \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$$

$$x = P \cos \varphi \qquad x^2 = P^2 \cos^2 \varphi$$
$$y = P \operatorname{sen} \varphi \qquad y^2 = P^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$x^2 + y^2 = P^2 (\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) = P^2$$

$$J = \frac{\delta (x, y)}{\delta (P, \varphi)} = P$$

Substituindo e mudando os limites, vem:

$$\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} P^2 . P \, dP \, d\varphi = \int_0^a P^3 \, dP \int_0^{\frac{\pi}{2}} dP =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^a P^3 \, dP = \frac{\pi}{2} \left[\frac{P^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi}{2} \times \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{8}$$

$$2) \int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2+z^2} \, dz \, dy \, dx$$

Façamos:

$$x = P \cos w$$
$$y = P \operatorname{sen} w \qquad J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(P, w, z)} = P$$
$$z = z$$

$$x^2 = P^2 \cos^2 w \qquad x^2 + y^2 = P^2 (\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w) =$$
$$y^2 = P^2 \operatorname{sen}^2 w \qquad = P^2$$

$$(x^2 + y^2)^{3/2} = (P^2)^{3/2} = P^3$$

Multiplicando-se êste resultado pelo jacobiano, tem-se: $P^3 \times P = P^4$.

Mudando os limites e substituindo, vem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec w} \int_0^P \frac{P^4}{P^2 + z^2} \, dz \, dP \, dw =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec w} P^4 \left[\frac{1}{P} \operatorname{arctg} \frac{z}{P} \right]_0^P = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec w} P^3 \, dP \, dw =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{P^4}{4} \right]_0^{\sec w} = \frac{\pi}{16} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 w \, dw$$

$$\int \sec^4 x \, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x \, dx = \int \sec^2 x \, dx +$$

$$+ \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$$

$$\frac{\pi}{16}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 w\, dw = \frac{\pi}{16}\left[\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16}\left(1 + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{16} \times \frac{4}{3} = \frac{\pi}{12}$$

Por meio do jacobiano, obtivemos uma integral mais simples, entretanto, se usarmos um pequeno artifício, poderemos resolvê-la ainda mais fàcilmente. Se não, vejamos:

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dy\, dx =$$

$$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx =$$

$$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\left[\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} dy\, dx =$$

$$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{x} (x^2+y^2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}(x^2+y^2)\, dy\, dx = \frac{\pi}{4}\int_{0}^{1}\left[yx^2 + \frac{y^3}{3}\right]_{0}^{x} dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{0}^{1}\left(x^3 + \frac{x^3}{3}\right) dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{4x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{4x^4}{3 \times 4}\right]_{0}^{1} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{12}$$

Estas integrais foram propostas por H. B. Phillips, pg. 276, da edição espanhola e Harold Maile Bacon, pg. 606, 1ª edição. A primeira ficou muito simplificada, em virtude do jacobiano, pois outra solução seria menos fácil.

A integral de Gaus, muito empregada em Estatística, pode ser também resolvida, de modo semelhante, transformando as coordenadas cartesianas em polares.

3) $$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

$$x = P \cos \Theta \qquad x^2 + y^2 = P^2$$
$$y = P \operatorname{sen} \Theta$$

$$J = \frac{\delta (x, y)}{\delta (P, \Theta)} = P$$

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-P^2} P\, dP\, d\Theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-P^2} P\, dP = \frac{\pi}{2} \left[- e^{P^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$I^2 = \frac{\pi}{4} \; ; \; I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Por meio da função gama, obtém-se, contudo, uma solução mais simples.

Faz-se $x^2 = z \qquad x = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$

$$dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-z} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \Gamma \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{l \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2 l^2}} dx$$

Fazendo-se $z = \frac{x^2}{2 l^2}$, $x = l \sqrt{2 z}$

$$dx = \frac{l}{\sqrt{2 z}}$$ Substituindo, vem:

$$2 \times \frac{1}{l\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{l}{\sqrt{2z}} dz = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{-\frac{1}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \sqrt{\pi} = 1$$

Eis aquí uma pequena contribuição, no sentido de simplificar ainda mais umas questões consideradas menos fáceis.