Revista Ceres 25(141):455-466. 1978.

SIMULAÇÃO DE PARÂMETROS CLIMÁTICOS PARA A ÉPOCA DE CRESCIMENTO DAS PLANTAS*

Gilberto C. Sediyama
William J. Chancellor
Thomas H. Burkhardt
John R. Goss**

1. INTRODUÇÃO

O clima é um fator dominante no controle do crescimento das plantas. Além disso, as produções agrícolas são elementos probabilísticos, no sentido de que dependem das variáveis climáticas, tais como quantidade e distribuição de chuvas, temperatura do ar à sombra e umidade relativa do ar da região durante a época de crescimento de uma cultura.

Modelos de simulação matemática que descrevem parâmetros do tempo têm sido aplicados com mais freqüência com a finalidade de prever o comportamento das distribuições probabilísticas dos elementos climáticos.

Com o recente desenvolvimento do interesse mundial em aumentar a produção de alimentos e fibras, a técnica de simulação tem sido também direcionada para o desenvolvimento de ferramentas conceituais, o que nos possibilita otimizar programas de pesquisas para explorar seus valores potenciais de promoção do crescimento econômico.

Considerável número de pesquisas tem sido registrado no que se refere a uma variável do tempo, que procura: a) caracterizar um elemento climático de um local e b) definir cada parâmetro do clima em termos de sua distribuição de ocorrência que mais se ajusta a determinada distribuição de freqüência estatística ou série matemática.

Estes eventos dos elementos climáticos, em qualquer período de tempo têm sido calculados e a distribuição teórica tem sido comparada com fatos observados.

A distribuição da probabilidade de precipitação, que se ajusta à seqüência de dias secos ou chuvosos para diversas áreas climaticamente diferentes, é complexa, porque a quantidade de chuva está associada à definição de sua ocorrência ou não. Além disso, a distribuição da probabilidade deve referir-se aos parâmetros que são relacionados com os eventos condicionais, isto é, a probabilidade de certa quantidade de chuva depende da ocorrência de precipitação num período de tempo.

Se a probabilidade de chuva em determinado dia depende do fato de ter sido

---

* Recebido para publicação em 08-12-1977.

** Respectivamente, Professor Adjunto da U.F.V., Professor Titular, Professor Associado e Professor Titular da Universidade da Califórnia.

o dia anterior chuvoso ou seco e se a probabilidade de chuva é ainda considerada independente dos eventos anteriores, tal modelo de probabilidade, de acordo com GABRIEL e NEUMANN (*6*), é uma «cadeia de Markov», cujos parâmetros são as duas probabilidades condicionais:

$P_1 = P_r$ (dia com chuva/dia anterior chuvoso)

$P_0 = P_r$ (dia com chuva/dia anterior seco)

Esses mesmos pesquisadores mostram que o modelo de probabilidade de «cadeia de Markov» ajusta-se muito bem aos dados observados de precipitação pluviométrica de Tel-Aviv, explicando o fenômeno da distribuição de períodos secos, períodos úmidos e ciclos climáticos.

WEISS (*15*) e CASKEY (*3*) também têm observado que a distribuição teórica da probabilidade de ocorrência da precipitação derivada da simples «cadeia de Markov» corresponde aos valores da probabilidade de chuva observada referente a um período de vários anos e para áreas climaticamente diferentes.

Em estudos relativos à seqüência do comprimento do período de dias secos e dias úmidos em cidades canadenses, LONGLEY (*9*) concluiu que, após dias anteriores chuvosos, a probabilidade de o dia seguinte ser também chuvoso é constante, independentemente da duração do período úmido. A mesma conclusão é verdadeira para o tempo climático seguido de dias secos, embora neste caso haja um pequeno aumento na probabilidade de um tempo seco com a persistência do período sem chuva. Por meio da função linear entre os logaritmos decimais da freqüência y de períodos secos e úmidos de vários dias, ele sugeriu a equação:

$$\log y = a + bn$$

onde a e b são parâmetros para dias secos e dias úmidos, para determinada estação climatológica. Os parâmetros foram determinados pelo método dos quadrados mínimos e o termo log y representa o logaritmo decimal de y.

Por outro lado, os estudos de COOKES (*4*) sobre a duração de períodos secos e úmidos em Moncton, New Brunswick, e os trabalhos de WILLIANS (*16*) mostram que a distribuição de freqüência destas seqüências está intimamente associada às séries geométricas ou logarítmicas ou ambas.

WISER (*17*), TOPIL (*14*) e EICHMEIER *et alii* (*5*) têm também mostrado que a possibilidade de ocorrência de chuva está relacionada com a duração do período chuvoso e com a probabilidade de termos um dia chuvoso no próximo dia, conhecendo-se a ocorrência de chuva no dia em questão.

Muitos outros estudiosos têm investigado métodos de análise probabilísticos com referência aos dados de precipitação. A maioria dos investigadores concluiu que o método de probabilidade de maior aceitação, em análise de dados de precipitação é a distribuição gama incompleta, proposta por BARGER e THOM (*1*) e THOM (*13*). Esta distribuição de probabilidade tem o limite inferior igual a zero e se ajusta muito bem a variáveis aleatórias contínuas em climatologia.

BRIDGES e HAAN (*2*) desenvolveram técnicas para verificar a validade das estimativas das precipitações determinadas pelo uso da distribuição gama incompleta. Eles apresentam tabelas com erros de probabilidades de várias magnitudes, numa estimativa de precipitação baseada em dados observados para casos selecionados.

A distribuição gama é derivada da função gama conhecida e apresenta distribuições que são capazes de modelar distribuição de probabilidades tendenciosas. A função gama pode ser definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty x^{\gamma - 1} e^{-x}\, dx \qquad (1)$$

A variável aleatória contínua x segue a distribuição gama com parâmetros γ e β se a sua função de densidade for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\gamma \Gamma(\gamma)} x^{\gamma - 1} e^{-x/\beta} \qquad (2)$$

para $\gamma > 0$ e $\beta > 0$.

e ainda:

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{\beta^\gamma \Gamma(\gamma)} x^{\gamma - 1} e^{-x/\beta} dx \tag{3}$$

onde:

x = variável aleatória contínua, que representa a magnitude do evento,
F(x) = probabilidade de ocorrência do evento x,
γ = parâmetro de forma,
β = parâmetro de escala de x,
e = base do logaritmo neperiano,
a = origem.

Desde que valores negativos de chuva são impossíveis, é conveniente, para o nosso propósito, forçar a passagem da curva pela origem dos eixos coordenados. A equação (3), com pequenas modificações, fica sendo:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\beta^\gamma \Gamma_x(\gamma)} x^{\gamma - 1} e^{-x/\beta} dx \tag{4}$$

$\Gamma_x(\gamma)$ = função gama incompleta,
x = quantidade de chuva, em mm,
F(x) = probabilidade de x mm ou menos de chuva.

Neste particular, os «momentos» proporcionam uma fraca estimativa dos parâmetros. Entretanto, THOM *(12)* demonstrou que razoáveis estimativas podem ser obtidas pelo método da verossimilhança, as quais estão muito bem determinadas por:

$$\hat{\beta} = \bar{x}/\hat{\gamma} \tag{5}$$

$$12A\,\hat{\gamma}^2 - 6\hat{\gamma} - 1 = 0 \tag{6}$$

que é uma equação quadrática na qual a única raiz pertinente à equação é

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{4A}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{3}}\right) \tag{7}$$

onde:

$$A = \operatorname{Ln}\bar{x} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \operatorname{Ln} x_j \tag{8}$$

N = número de dias com chuva,
x_j = altura de chuva em mm para o dia j,
Ln = operador do logaritmo natural.

Temperatura Média do Ar

O modelo matemático para prever a temperatura média do ar na base diária apóia-se também em suposição questionável, porque a temperatura do ar, como sabemos, é influenciada pela cobertura vegetal, pela radiação solar, pela umidade absoluta do ar, pela evapotranspiração e por outros fatores. Além disso, alguns desses fatores são também influenciados, até certo ponto, pela temperatura do ar.

Admite-se que a distribuição normal de freqüência proporcione um ajuste razoável para a maioria das variáveis climáticas que não têm limites inferior ou superior, tal como a pressão atmosférica. THOM *(13)* cita que a temperatura do ar tende a ser normalmente distribuída, com sua função de densidade definida por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{9}$$

onde:

μ = média da população,
σ = desvio-padrão da população.

A média da população, μ, é estimada por $\overline{X}$ e o desvio-padrão, σ, por $\hat{s}$. Estas estimativas são obtidas por meio de amostras, x, pelas relações:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{10}$$

$$\hat{s} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{X})^2}{N-1} \right)^{1/2} \tag{11}$$

Umidade Relativa do Ar

Embora a umidade relativa do ar seja um dos elementos climáticos mais importantes que influi diretamente no crescimento das plantas, é relativamente pequeno o número de trabalhos referentes ao estudo da distribuição de freqüência da umidade relativa do ar.

Expressando a umidade relativa como valor decimal de 0 a 1 e considerando-a como função contínua neste intervalo, YAO (18) concluiu que a função de densidade beta é o modelo apropriado para a distribuição de freqüência das observações de umidade relativa.

A função beta incompleta que descreve a distribuição de freqüência da variável aleatória x pode ser definida pela seguinte expressão, como mostra YAO (18):

$$\beta_x(p, q) = \int_0^x x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \tag{12}$$

para x = 1, a função beta completa é

$$\beta_x(p, q) = \beta_1(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \tag{13}$$

PEARSON (*11*) tabelou a relação:

$$I_x(p, q) = \beta_x(p, q)/\beta(p, q) \tag{14}$$

onde β_X é a função beta, I_X é a função distribuição cumulativa ou a função beta incompleta e p e q são os dois parâmetros positivos estimados pelos dois primeiros «momentos» coeficientes:

$$p = \mu_1' (\mu_1' - \mu_2')/(\mu_2' - \mu_1')^2 \tag{15}$$

$$q = (1 - \mu_1')(\mu_1' - \mu_2')/(\mu_2' - \mu_1')^2 \tag{16}$$

Os estimadores para μ_1' e μ_2' são $\hat{\mu}_1'$ e $\hat{\mu}_2'$, respectivamente, onde:

$$\hat{\mu}_1' = \sum_{i=1}^{N} RH_i/N \tag{17}$$

$$\hat{\mu}_2' = \sum_{i=1}^{N} RH_i^{\,2}/N \tag{18}$$

O objetivo específico deste trabalho é descrever os parâmetros climáticos de precipitação pluviométrica, temperatura média e umidade relativa do ar, por meio de um modelo estocástico determinístico, para a época de crescimento de plantas. As freqüências e as intensidades dos elementos climáticos são estudadas por meio das distribuições estatísticas dos valores normais dos dados observados.

2. DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMÁTICO

Sabe-se que a temperatura do ar, a umidade relativa e a precipitação pluviométrica são importantes fatores do ambiente que controlam a necessidade de água para o crescimento das plantas. É necessário, portanto, quantificar suas distribuições sobre áreas agricultáveis e suas variações durante a época de crescimento das plantas.

Na computação dos eventos probabilísticos de cada componente do ambiente da planta, a escala do período de tempo deve ser definida antes da medida da intensidade de cada elemento e do resultado do efeito da resposta da planta para este período.

Neste trabalho, o período de tempo definido é o chamado semana meteorológica (ou semana climatológica) por simplicidade. Assim:

1 a 7 de março é a semana número 1,
8 a 14 de março é a semana número 2, ...
. . .
6 a 12 de setembro é a semana número 28, ...
. . .
21 a 27 de fevereiro é a semana número 52.

Neste modelo, as operações agrícolas para a época de crescimento das plantas iniciam na semana 31 (28 de setembro a 4 de outubro) e terminam na semana 14 (31 de maio a 6 de junho). Para anos com o mês de fevereiro de 29 dias, o vigésimo nono dia do mês não será considerado. Com a finalidade de terminar a semana climatológica no dia 28 de fevereiro, a semana 31 foi preparada para ser computada a partir do dia 28 de setembro e o período de 22 a 28 de fevereiro foi ajustado para representar a semana número 52.

Relações entre as distribuições do parâmetro do tempo, como quantidade de chuva diária, temperaturas médias do ar e umidades relativas, são combinadas com as funções de densidades probabilísticas pelo método de Monte Carlo. Este método é particularmente apropriado ao estudo de sistemas que são essencialmente aleatórios.

A primeira ordem do modelo da cadeia de probabilidade de Markov para ocorrência de precipitação pode ser estimada de maneira direta com o uso da freqüência relativa apropriada. Esta probabilidade não pode ser explicada em termos de um fenômeno físico, como a ocorrência de chuva, mas indica meramente uma função de distribuição estatística das observações. As probabilidades condicionais de precipitação podem ser computadas por meio das seguintes relações:

$$PWD\ (I) = \frac{\text{Nº de dias com chuva seguidos de dias secos}}{\text{Nº de dias secos}} \tag{19}$$

$$PWW\ (I) = \frac{\text{Nº de dias com chuva seguidos de dias chuvosos}}{\text{Nº de dias com chuva}} \tag{20}$$

onde:

PWD(I) = probabilidade condicional de chuva para determinado dia da semana I, sendo seco o dia anterior.

PWW(I) = probabilidade condicional de chuva para determinado dia da semana I, sendo chuvoso o dia anterior.

Neste trabalho um dia chuvoso corresponde a qualquer dia com uma altura de precipitação atmosférica maior que 0,1 mm, isto é, um dia com uma quantidade de chuva mensurável.

Considerando que a distribuição de chuva siga uma apropriada freqüência relativa (função de densidade gama incompleta) e que o fenômeno de precipitação possa ser explicado por um processo estocástico do modelo de probabilidade da «cadeia de Markov», a quantidade de chuva pode ser simulada com o uso da técnica de Monte Carlo, de acordo com JONES *et alii* (*8*) e HAAN e BARFIELD (7).

A distribuição de densidade teórica de uma variável aleatória contínua Y é uniformemente distribuída num intervalo 0 — 1. Então, para qualquer quantidade aleatória de chuva, x, com função de densidade probabilística f(x), a função:

$$F(x) = \int_0^\infty f(x)dx \qquad (21)$$

é uniformemente distribuída no intervalo 0 — 1, onde:

$$f(x) = \frac{x^{\gamma-1}\ e^{-x/\beta}dx}{\beta^{\gamma}\Gamma_x(\gamma)} \qquad (22)$$

A quantidade de chuva diária pode ser computada por meio da equação formulada por McWHORTER *et alii* (*10*):

$$G(x) = (1 - P) + P \times F(x) \qquad (23)$$

onde:

G(x) = probabilidade de x mm de chuva ou menos,

F(x) = distribuição cumulativa de chuva,

P = probabilidade de chuva condicional computada para os dias seguidos de dias chuvosos ou secos (PWD(I) ou PWW(I)).

x = quantidade de chuva, em mm.

O procedimento para simular o valor aleatório da quantidade de chuva diária, x, por meio da função de densidade gama incompleta é dado por JONES *et alii* (*8*) e HAAN e BARFIELD (7). Um número aleatório (R_u) de uma distribuição no intervalo 0 — 1 é gerado no computador e, se R_u for menor que G(x), teremos precipitação. Então, a quantidade de chuva x pode ser obtida por meio da solução numérica da equação (23) para o número aleatório. A Figura 1, segundo HAAN e BARFIELD (7), mostra o procedimento para gerar um evento aleatório, y, por meio de uma função de densidade probabilística aleatória, p(x). Seleciona-se um número aleatório, R_u, de uma distribuição uniforme no intervalo 0 — 1, substitui-se R_u por P(y) e resolve-se para y.

Os valores observados da quantidade de chuva também podem ser introduzidos no modelo, e a partir desses dados é possível estimar a quantidade de precipitação para o próximo dia em função da ocorrência ou não de chuva no dia anterior. Além disso, o modelo pode gerar quantidades de chuva aleatória em dias sucessivos de acordo com o valor da quantidade de chuva aleatória do dia anterior.

A temperatura média diária e a umidade relativa também podem ser computadas de maneira semelhante, pressupondo-se que os dados de temperatura sejam normalmente distribuídos e que a função de distribuição de densidade beta se ajuste aos dados de umidade relativa. Temperaturas médias do ar e umidades relativas podem ser consideradas diferentemente se o dia é chuvoso ou seco, chamadas de médias diárias de temperatura e de umidade relativa para dias secos ou dias chuvosos.

A Figura 2 mostra o diagrama de procedimento para simulação dos parâmetros climáticos diários de precipitação, temperatura do ar e umidade relativa do ar para uma estação de crescimento de plantas.

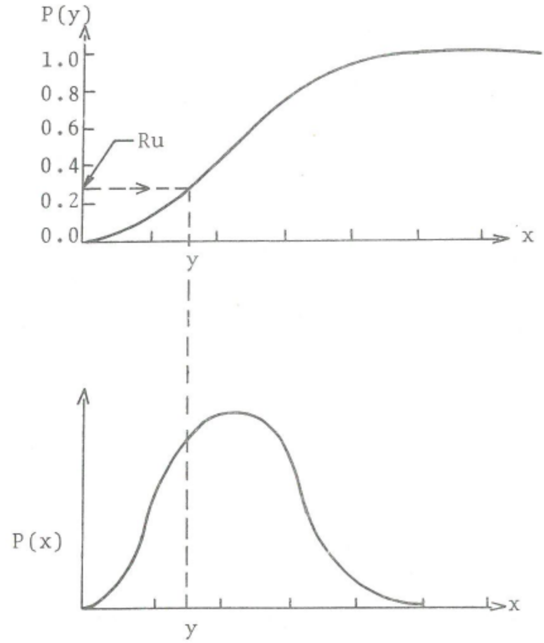

FIGURA 1 - Procedimento para gerar um valor aleatório a partir de uma distribuição de probabilidade.

3. APLICAÇÃO DO MODELO

O modelo de simulação dos parâmetros climáticos diários de precipitação atmosférica, temperatura do ar e umidade relativa foi programado para um computador digital (BURROUS 6700 ou 7700) na linguagem FORTRAN.

Os parâmetros de escala gama e beta para a função de densidade gama incompleta foram estimados pelo método da verossimilhança.

No Quadro 1 vêem-se os valores dos parâmetros gama e beta obtidos dos dados diários observados de precipitação referentes a um período de trinta anos na Estação Climatológica Principal de Viçosa, para dias anteriores secos e dias anteriores chuvosos.

Os valores simulados de dez anos de precipitação foram testados com os dados referentes à Estação Climatológica de Viçosa.

A média dos dez anos de precipitação simulada para o período da época de crescimento de plantas para Viçosa deu resultados que correspondiam a erros máximos de 6,2 por cento dos dados observados.

No modelo também foram computadas as médias semanais e as variâncias dos dados de temperatura do ar e de umidade relativa, respectivamente, para dias secos e chuvosos em Viçosa, correspondentes a um período de dez anos de observações diárias.

Embora o teste estatístico de t não tenha acusado diferença significativa, ao nível de 5 por cento, entre médias de temperaturas de dias secos e médias de temperaturas de dias chuvosos, o modelo simula as temperaturas do ar para dias secos e chuvosos a partir das médias de temperaturas e variâncias computadas para dias secos e chuvosos, respectivamente.

Como era esperado, o teste estatístico de t mostrou que há uma diferença significativa, ao nível de 5 por cento de probabilidade, entre a umidade relativa de dias secos e umidade relativa de dias chuvosos, isto é, as umidades relativas dos dias chuvosos são mais altas que as umidades relativas dos dias secos.

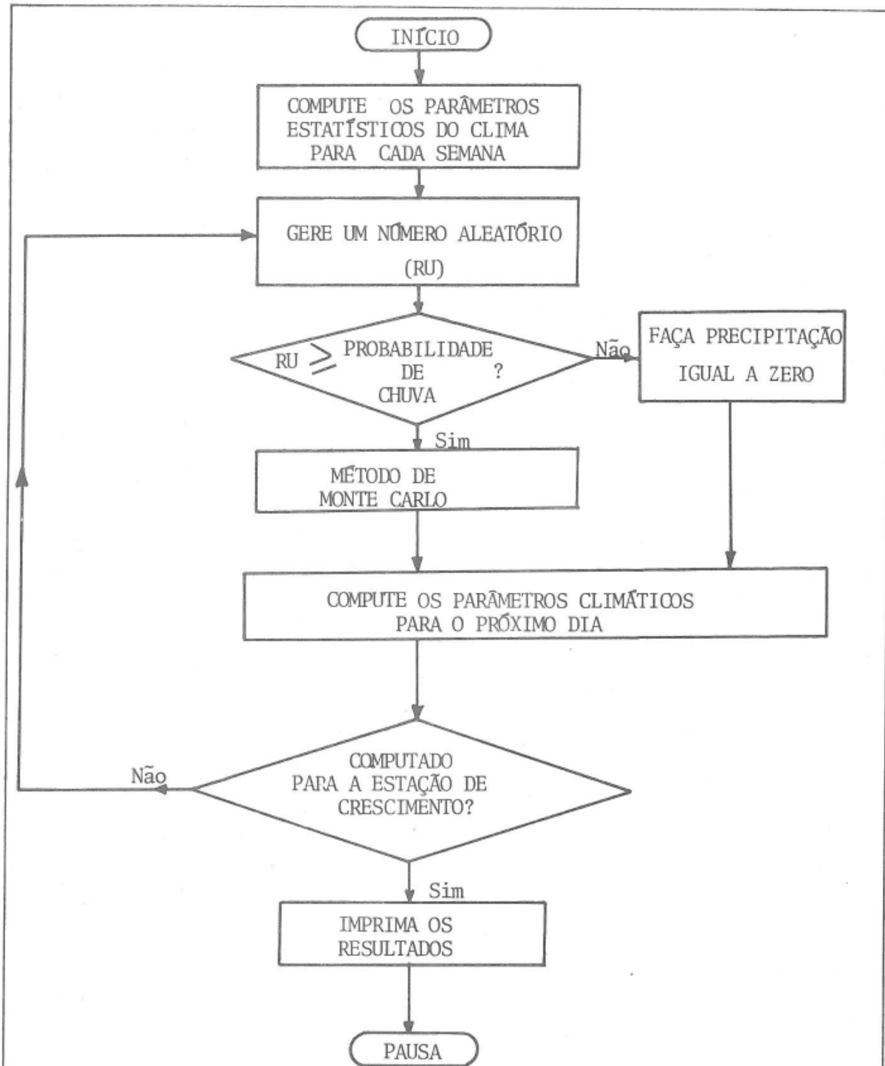

FIGURA 2 - Diagrama de blocos simplificado para simulação dos parâmetros climáticos.

As Figuras 3 a 6 mostram a análise de regressão linear entre os valores simulados e os valores observados dos parâmetros climáticos para uma média de dez anos, em base semanal, para os dias secos e chuvosos. No modelo desenvolvido neste trabalho, os parâmetros r^2 têm mostrado precisão suficiente para prever as médias das temperaturas do ar e das umidades relativas para o período correspondente, na época de crescimento de plantas em Viçosa.

QUADRO 1 - Parâmetros de escala da função gama incompleta, para Viçosa - MG

LOCAL = VIÇOSA	LATITUDE = 20-45 S*
ESTADO = MINAS GERAIS	LONGITUDE = 42-51 W. GrW.*
	ALTITUDE = 651,0 M

VALORES DOS PARÂMETROS ALFA E BETA PARA DISTRIBUIÇÃO DE CHUVA

- - -	GAMA PARA DIA ANTERIOR SECO	= .356339 E+00	- - -
- - -	GAMA PARA DIA ANTERIOR CHUVOSO	= .3971935E+00	- - -
- - -	BETA PARA DIA ANTERIOR SECO	= .4057962E+00	- - -
- - -	BETA PARA DIA ANTERIOR CHUVOSO	= .2019656E+01	- - -

* 20-45 é a latitude 20°45'. A mesma notação é usada para longitude.

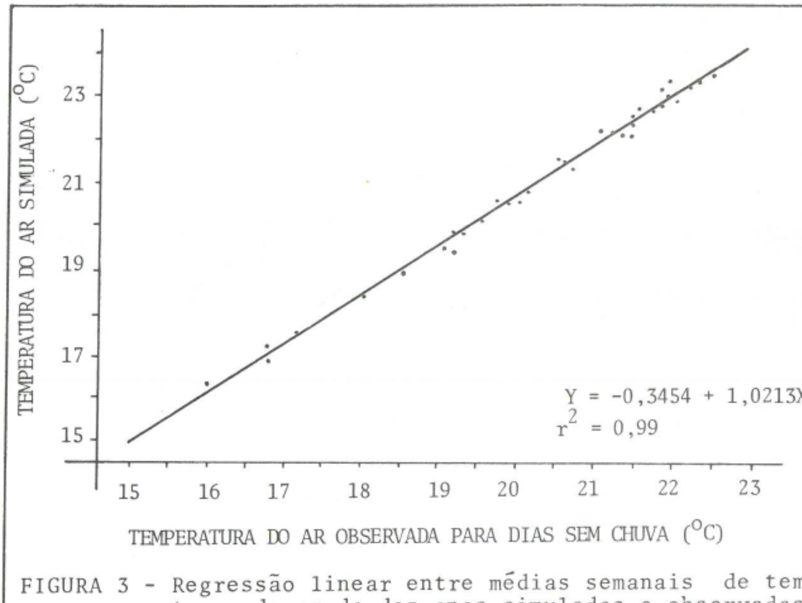

FIGURA 3 - Regressão linear entre médias semanais de temperaturas do ar de dez anos simuladas e observadas para dias sem chuva.

O menor valor do coeficiente de determinação foi 0,76, como está indicado na Figura 6. A menor precisão na simulação da umidade relativa do ar para os dias com chuva deve-se ao fato de que os dados observados de umidades relativas do ar apresentaram maiores variâncias para os dias com chuva, indicando a possibilidade de baixa umidade relativa do ar mesmo nos dias com alguma precipitação pluviométrica.

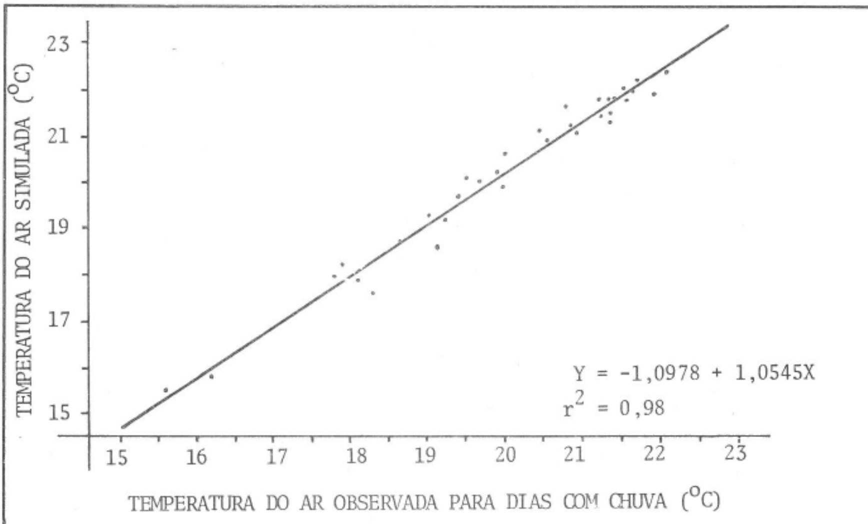

FIGURA 4 - Regressão linear entre médias semanais de temperaturas do ar de dez anos simuladas e observadas para dias com chuva.

4. RESUMO

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo estocástico determinístico para simular a distribuição dos parâmetros climáticos de precipitação pluviométrica, temperatura do ar e umidade relativa. As inter-relações conhecidas entre os valores pertinentes à temperatura média do ar e à umidade relativa e os dados diários de chuva referentes a um período de trinta anos foram utilizados para simular os dados climáticos diários, em relação funcional com o modelo probabilístico da «cadeia de Markov» para precipitação pluviométrica e semanas climatológicas para a época de crescimento de plantas em Viçosa, MG.

O modelo foi aplicado para os dados meteorológicos da Estação Climatológica Principal de Viçosa, e os resultados dos parâmetros climáticos simulados para um período de dez anos foram comparados com médias diárias, em base semanal, para a época de crescimento de plantas em Viçosa, MG. Os resultados do modelo desenvolvido apresentaram correlações com os dados observados e podem ser considerados de boa precisão para predizer as variáveis climáticas em bases semanais.

5. SUMMARY

This paper deals with development of a stochastic deterministic model to simulate the distribution of the climatic parameters of atmospheric precipitation, air temperature and relative humidity for the climate of Viçosa, Minas Gerais, Brazil. The concepts of statistical density distribution functions associated with climatic data are discussed for estimating daily weather parameters using the Monte Carlo technique and Markov chain probability distribution of rainfall data within a statistical framework for the growing season.

The model was applied to meteorological data from the climatological station of Viçosa, and the results of the simulated climatic parameters for a ten year period compared with daily averages, on a week-by-week basis, for the Viçosa agricultural growing season. The required weather data input-precipitation, temperature

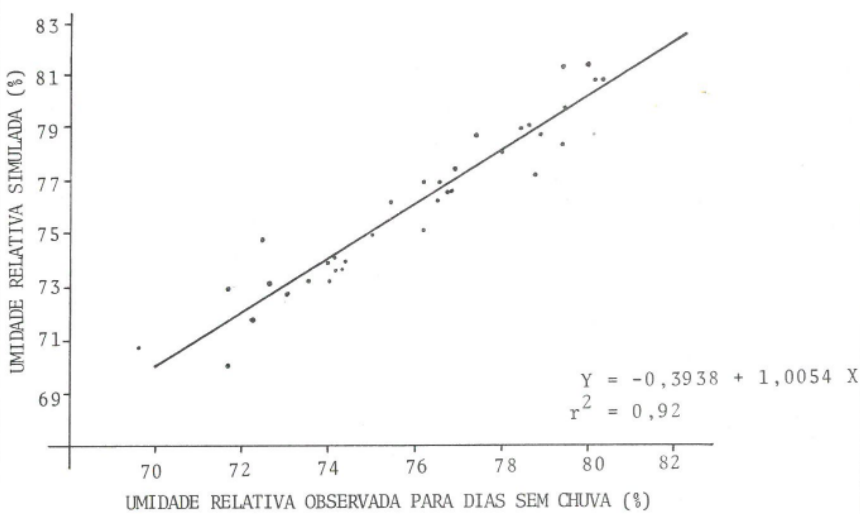

FIGURA 5 - Regressão linear entre médias semanais de umidades relativas de dez anos simuladas e observadas para dias sem chuva.

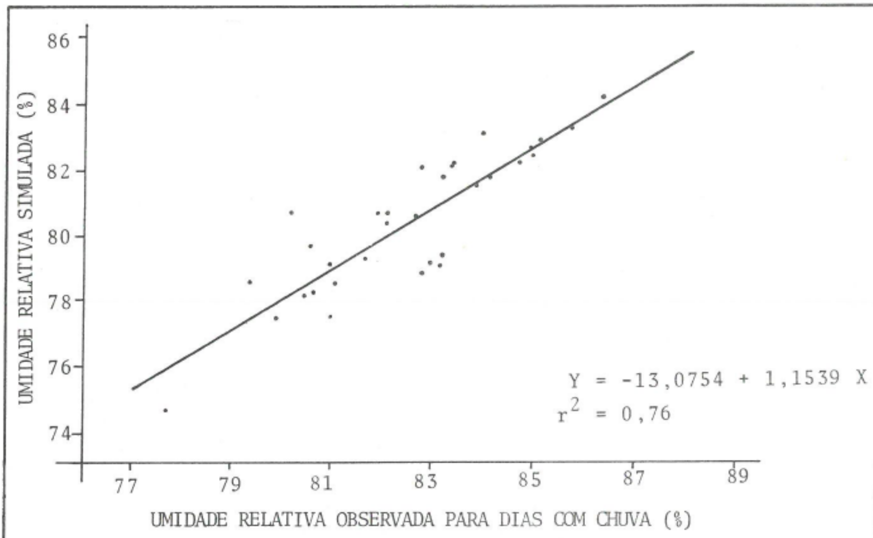

FIGURA 6 - Regressão linear entre médias semanais de umidades relativas de dez anos simuladas e observadas para os dias com chuva.

and relative humidity — for the model are discussed with respect to origin and form necessary to make the model operational.

6. LITERATURA CITADA

1. BARGER, G., & THOM, H.C.S. Evaluation of drought hazard. *Agron. Jour. 41*:519-526. 1949.

2. BRIDGES, T.C., & HAAN, C.T. Reliability of precipitation probabilities estimated from the gamma distribution. *Monthly weather Review. 100*:607-611. 1972.

3. CASKEY, J.E. Jr. A Markov chain model for the probability of precipitation occurrence intervals of various length. *Monthly Weather Review. 91*:298-301. 1963.

4. COOKE, D.S. The duration of wet and dry spells at Moncton, New Brunswick. *Quart. J. Royal Meteor. Soc. 79*:536-538. 1953.

5. EICHMEIER, A.H., & BATEN, W.D. Rainfall probabilities during the crop season in Southern Lower Michigan. *Monthly Weather Review. 90*:277-281. 1962.

6. GABRIEL, K.R., & NEUMANN, J. A Markov chain model for daily rainfall occurrence at Tel Aviv. *Quart. J. Royal Meteor. Soc. 88*:90-95. 1962.

7. HAAN, C.T. & BARGIELD, B.J. Data simulation from probability distributions. *Transactions of the ASAE. 14*:374. 1971.

8. JONES, J.W., COLWICK, R.F., & THEADGILL, E.D. A simulated environmental model of temperature, evaporation, rainfall and soil moisture. *Transaction of the ASAE. 15*:366-372. 1972.

9. LONGLEY, R.W. The length of dry and wet periods. *Quart. J. Royal Meteor. Soc. 79*:520-527. 1953.

10. McWHORTER, J.C., MATTES, R.K. Jr., & BROOKS, B.P. Jr. *Precipitation probabilities for Mississippi*. Mississippi University, Water Resources Research Institute, 1966. 51 p.

11. PEARSON, K. *Table of the incomplete beta function*. London, University College, 1934. 494 p.

12. THOM, H.C.S. A note on the gamma distribution. *Monthly Weather Review. 86*:117-122. 1958.

13. THOM, H.C.S. *Some methods of climatological analysis*. Geneva, WMO, 1966. 53 p. (Technical note No. 81).

14. TOPIL, L. Le bilan d'eau des sols relations entre les precipitations, l'evaporation et l'ecoulement. *Sols Ann. Agron. 3*:183-172. 1954.

15. WEISS, L.L. Sequences of wet or dry days described by a Markov chain probability model. *Monthly Weather Review. 92*:169-176. 1964.

16. WILLIANS, C.B. Sequences of wet and of dry days considered in relation to the logarithmic series. *Quart. J. Royal Meteor. Soc. 78*:91-96. 1952.

17. WISER, E.H. Monte Carlo methods applied to precipitation frequency analysis. *Transactions of the ASAE. 9*:538-542. 1966.

18. YAO, A.Y.M. A statistical model for the surface relative humidity. *Journal of Applied Meteorology. 13*:17-31. 1974.