Revista Ceres 26(144):205-215.1979.

TEMPERATURA DO SOLO, A 2 CM DE PROFUNDIDADE, COMO RESPOSTA À TEMPERATURA DO AR*

Francisco Rodrigues de Oliveira
Gilberto Chohaku Sediyama
Manoel Vieira
José Borges Pinheiro Filho**

1. INTRODUÇÃO

A temperatura do solo, embora importante para a germinação de sementes e o desenvolvimento do sistema radicular das plantas, não se mede com facilidade em condições de campo. Em razão disso, seria interessante que fosse desenvolvido um modelo que permitisse estimar essa temperatura a 2 cm de profundidade.

Um dos meios para se fazer essa estimativa seria considerar a temperatura do solo a 2 cm de profundidade como uma «resposta ao «estímulo» temperatura do ar, pelo fato de ser essa determinação mais simples. Na realidade, a temperatura do ar é uma resposta à temperatura das camadas mais superficiais do solo, que sofrem a influência da cobertura vegetal, da radiação solar e da evapotranspiração. Como as influências recíprocas são inevitáveis, é mais prático considerar a temperatura do solo a 2 cm de profundidade como uma resposta ao estímulo temperatura do ar.

O instrumento adequado para o estudo de funções periódicas é a Análise de Fourier (4, 6, 8, 10). Os dados de temperatura geram séries finitas de Fourier

$$f_k\ (t) = a_o + \sum_{n=1}^{k} (a_n\ \cos nt + b_n\ \mathrm{sen}\, nt), \qquad (1)$$

que aproximam as funções temperaturas do ar e do solo (*1, 2, 3, 9, 11, 13*).

---

* Parte da tese apresentada, pelo primeiro autor, à Universidade Federal de Viçosa, para a obtenção do grau de «Magister Scientiae».

Recebido para publicação em 26-10-1978.

** Respectivamente, Professor Assistente, Professor Adjunto, Professor Assistente e Professor Colaborador da U.F.V.

Os sistemas lineares, que se caracterizam por terem uma «função estímulo» (f_e) de entrada e uma «função resposta» (f_r) de saída, têm sua estruturação teórica e aplicações bem definidas por SOKOLNIKOFF e REDHEFFER (*12*), HSU (*6*) e FIGUEIREDO (*4*).

HASFURTHER e BURMAN (*5*) utilizaram a técnica de sistemas lineares entre a temperatura do ar (f_e) e a temperatura do solo a 1 polegada (2,54 cm) de profundidade (f_r), e mostraram que a temperatura do ar é uma resposta à temperatura do solo. O sistema linear usado foi o da convolução. Entretanto, usaram a suavização de dados e o ajustamento de séries de Fourier a cada conjunto anual de temperatura, sem a preocupação de analisar a periodicidade dos dados observados.

Neste trabalho, propõe-se aplicar um modelo matemático, por meio da técnica de sistemas lineares, com Análise de Fourier, de estimativa da temperatura do solo, a 2 cm de profundidade, como resposta à temperatura de ar e estudar também sua periodicidade.

O estudo das temperaturas do solo gera informações relativas ao seu comportamento térmico a diversas profundidades e permite analisar a periodicidade, a profundidade de amortecimento e a difusividade térmica, que são importantes elementos para pesquisas futuras e estão dentro das recomendações propostas pela Comissão de Climatologia da Organização Meteorológica Mundial (*9*).

O modelo matemático funcionará a partir do conhecimento prévio das temperaturas diárias do ar. A continuação natural dessa linha de pesquisa é estudar métodos de previsão de temperatura do ar e daí prever, pelo modelo, a temperatura do solo.

2. MODELO MATEMÁTICO

Designando a temperatura do ar por TA e a do solo a 2 cm por TS, define-se o sistema linear com estímulo TA e resposta TS pela convolução

$$TS(t) = C(t) * TA(t) \tag{2}$$

onde t = tempo, em dias,
C = função linearizadora.

Tal sistema é invariável no tempo e dinâmico.

A equação (2) equivale a

$$TS(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t-s) \quad TA(s)\ ds, \tag{3}$$

de vez que o sistema é causal, sendo s um tempo passado e TA(s) ds um estímulo realizado por TA no tempo s.

Admitindo-se que as funções TA, TS e C sejam absolutamente integráveis, pode-se aplicar a transformada de Fourier à equação (2), obtendo-se

$$F\left[TS(t)\right] = F\left[C(t)\right] \ . \ F\left[TA(t)\right] \tag{4}$$

$$F\left[C(t)\right] = F\left[TS(t)\right] \ / \ F\left[TA(t)\right] \tag{5}$$

Às funções TA e TS ajustam-se séries de Fourier:

$$TA(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \tag{6}$$

$$TS(t) = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \operatorname{sen} nt) \tag{7}$$

Uma vez que TA e TS são expressas por série de Fourier, das equações (6) e (7) resulta

$$F\left[C(t)\right] = F\left[TS(t)\right] / F\left[TA(t)\right] = (c_n - id_n)/(a_n - ib_n), \tag{8}$$

para n = 0,1,2,3, ..., e daí

$$F\left[C(t)\right] = (a_n c_n + b_n d_n)/(a_n^2 + b_n^2) + i(b_n c_n - a_n d_n)/(a_n^2 + b_n^2) =$$
$$= p_n + iq_n \ , \ n = 0,1,2,3, \ ... \tag{9}$$

Tomando a transformada inversa de Fourier:

$$C(t) = F^{-1}\left[F\left[C(t)\right]\right] = p_o + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos nt + q_n \operatorname{sen} nt) \tag{10}$$

3. METODOLOGIA

3.1. Tomaram-se as temperaturas diárias do ar e do solo a 2 cm de profundidade, no período de 1971 a 1975, nos horários de 12, 18 e 24 TMG, obtidos na Estação Climatológica Principal de Viçosa, Minas Gerais, n.º 83642, latitude 20º 45'S e longitude 42º51'W.

A temperatura média diária do ar foi calculada pela fórmula do Instituto Nacional de Meteorologia do Ministério da Agricultura.

Temperatura média diária do ar =

$$= (t_{min} + t_{12} + t_{max} + 2\ t_{24})/5 \tag{11}$$

onde t_{min} = temperatura mínima do dia
t_{12} = temperatura das 12h TMG
t_{max} = temperatura máxima do dia
t_{24} = temperatura das 24 h TMG

A temperatura média diária do solo, a 2 cm, foi calculada pela fórmula

Temperatura média diária do solo =

$$= (t_{12} + t_{18} + 2\ t_{24})/4 \tag{12}$$

3.2. As temperaturas médias dos mesmos dias nos 5 anos foram promediadas.

3.3. A cada conjunto de 365 dados de temperaturas do ar (TA) e do solo (TS) foi ajustada uma série de Fourier:

$$TA(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)$$

$$TS(t) = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \operatorname{sen} nt)$$

Os coeficientes a_o, a_n, b_n, c_o, c_n e d_n foram calculados por meio de integração numérica, pela regra retangular.

3.4. Os coeficientes p_o, p_n e q_n da função linearizadora C foram calculados por intermédio dos coeficientes a_o, a_n, b_n, c_o e c_n, pelas equações

$$p_o = c_o/a_o \tag{13}$$

$$p_n = (a_n c_n + b_n d_n)/(a_n^2 + b_n^2) \tag{14}$$

$$q_n = (b_n c_n - a_n d_n)/(a_n^2 + b_n^2) \tag{15}$$

3.5. A integral $TS(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t\text{-}s)\ TA(s)\ ds$ foi calculada numericamente, pela regra do trapézio, e o resultado, assim obtido, para cada dia do ano, foi dividido pela TS a 2 cm, obtida pela média de 5 anos, gerando, dessa forma, um fator f, pelo qual deve ser multiplicada a TS calculada pela equação (3), no período de teste do modelo.

3.6. Para cada período em que o modelo foi testado, calculou-se o desvio médio d, dado por

$$d = (\sum^{n} (TS\ medida - TS\ estimada)^2/n)^{1/2} \tag{16}$$

onde n é o número de dias do período.

3.7. O modelo matemático, representado pela equação (3), foi testado com os dados de 1976.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. *Determinação do modelo*

Os harmônicos que melhor explicaram os dados médios diários de TA de 1971 a 1975, na ordem decrescente, foram 1, 2, 19, 35, 10, 9 e 5, enquanto os dados de TS foram mais bem explicados pelos harmônicos 1, 2, 10, 3, 19, 9, 5, 35 e 7.

Levando em consideração melhor explicação em ambas as séries, foram escolhidos os harmônicos 1, 2, 5, 9, 10, 19 e 35, cujos valores se vêem no Quadro 1.

Escolhidos os harmônicos que aproximam as séries TA e TS, os coeficientes da série que aproxima a função C foram determinados pelas equações (13), (14) e (15), cujos resultados se vêem no Quadro 2.

Na integração numérica de

$TS(t) = \int_{-\infty}^{t} C\ (t-s)\ \ TA(s)ds$ surgem os valores

QUADRO 1 - Coeficientes das séries de Fourier para temperatura do ar, temperatura do solo a 2 cm e respectivos r^2, obtidos das médias de 1971 a 1975. Viçosa, MG

n	ar		r^2(%)	Solo 2 cm		r^2(%)
	a_n	b_n		c_n	d_n	
0	19,3905			23,5536		
1	3,3237	0,9010	87,59	4,2729	1,2406	85,61
2	-0,7221	0,4015	92,61	-0,5815	0,9965	91,35
5	-0,0237	0,1340	92,75	-0,0975	0,2412	91,64
9	-0,0497	0,1272	92,89	-0,1243	0,3053	92,11
10	0,1024	0,1487	93,13	-0,0113	0,4625	93,03
19	-0,3370	0,1270	94,08	-0,3791	0,1684	93,77
35	0,1010	-0,1871	94,41	0,1065	-0,1741	93,95

QUADRO 2 - Coeficientes da série de Fourier finita que aproxima a função linearizadora C

n	p_n	q_n
0	1,21469	
1	1,29186	-0,02306
2	1,20126	0,71204
5	1,86947	-0,39559
9	2,41262	-0,03436
10	2,07366	-1,50475
19	1,15006	0,06653
35	0,95842	-0,05186

C $(t_o - s)$, $s \leq t_o$, sendo t_o um dia fixo. Fazendo s variar de t_o a $t_o - p$, têm-se os valores C (0), C(1), C(2), ..., C(p), que determinam quantos dias prévios podem ser usados para estimar TS no dia t_o.

A Figura 1 apresenta o gráfico da função linearizadora C, que revela o decréscimo da influência dos dias prévios e o possível uso de até 13 dias prévios.

O Quadro 3 apresenta os resultados da integração numérica de $\int_{-\infty}^{t} C(t-s)\, TA(s) ds$, de 10 em 10 dias; os resultados de cada coluna foram obtidos com os dados do próprio dia, que é o dia prévio um, e de tantos dias anteriores conforme o número da coluna. Os baixos valores iniciais devem-se aos truncamentos das séries e à convergência relativamente fraca das séries de Fourier, por não ter havido suavização dos dados.

O quociente (TS a 2 cm calculada pela equação (3))/(TS a 2 cm, média dos 5 anos) fornece, para cada dia do ano, um fator de correção pelo qual deverá ser multiplicada a temperatura calculada pela mesma equação (3), na fase de teste do modelo.

4.2. *Teste do modelo*

As temperaturas médias do ar do ano de 1976 foram usadas para testar o modelo, tendo sido destacados dois períodos secos e dois períodos chuvosos, com 30 e 60 dias.

As temperaturas do solo a 2 cm foram estimadas com o uso de até 12 dias prévios.

As Figuras 2 e 3 apresentam os valores observados e estimados de TS a 2 cm, usando-se as temperaturas do ar do mesmo dia (Figura 2) e de 12 dias prévios (Figura 3). Esses gráficos apresentam ainda, na parte inferior, colunas de alturas proporcionais à precipitação.

Como a chuva provoca o resfriamento rápido do solo, em períodos chuvosos quase sempre as TS medidas são menores que as estimadas. De modo geral, a presença de chuvas aumenta o desvio médio entre TS estimada e medida, conforme se vê pelo Quadro 3.

A curva de TS estimada com 12 dias prévios é mais suave que a curva estimada com temperatura do ar do mesmo dia.

Em períodos chuvosos há menor discrepância nas estimativas obtidas com as TA do mesmo dia. Em períodos secos, bem como anuais, os desvios médios diferem pouco entre si com a variação do número de dias prévios.

5. RESUMO E CONCLUSÕES

As temperaturas médias diárias do ar e do solo a 2 cm, dos anos de 1971 a 1975, em Viçosa-MG, geraram séries finitas de Fourier, cujos coeficientes foram calculados por integração numérica, pela regra retangular, coeficientes esses que foram usados para determinar os coeficientes da função linearizadora C, cuja obtenção tornou possível o cálculo numério da integral

$$TS(t_o) = \int_{t_o-p}^{t_o} C(t_o-s)\ TA(s)ds =$$

$$= \frac{\P}{365}\left[C(0)TA(t_o) + 2C(1)TA(t_o - 1) + \ldots + C(p)TA(t_o - p)\right] \qquad (17)$$

O valor dessa integral foi multiplicado por um fator variável conforme o dia do ano para estimar a TS do dia t_o, com o uso da temperatura do ar de p dias prévios.

O comportamento da função C tornou o modelo viável até 13 dias prévios, tendo sido usados até 12 dias na fase de teste, no ano de 1976.

As TS estimadas foram comparadas com as TS medidas em 1976, dentre as quais foram calculados os desvios médios.

Em vista dos resultados, conclui-se que:

1 — Os dados de TA e TS não suavizados tornam mais lenta a convergência das respectivas séries de Fourier, mas, por outro lado, permitem conhecer detalhadamente a periodicidade dos dados.

2 — Períodos sem chuva tornam mais segura a estimativa da TS.

3 — Em dias de chuva, a TS estimada com TA do mesmo dia apresenta menor desvio médio.

4 — Como as chuvas resfriam rapidamente o solo, mas não o ar, em dias chuvosos a TS medida é sempre inferior à estimada.

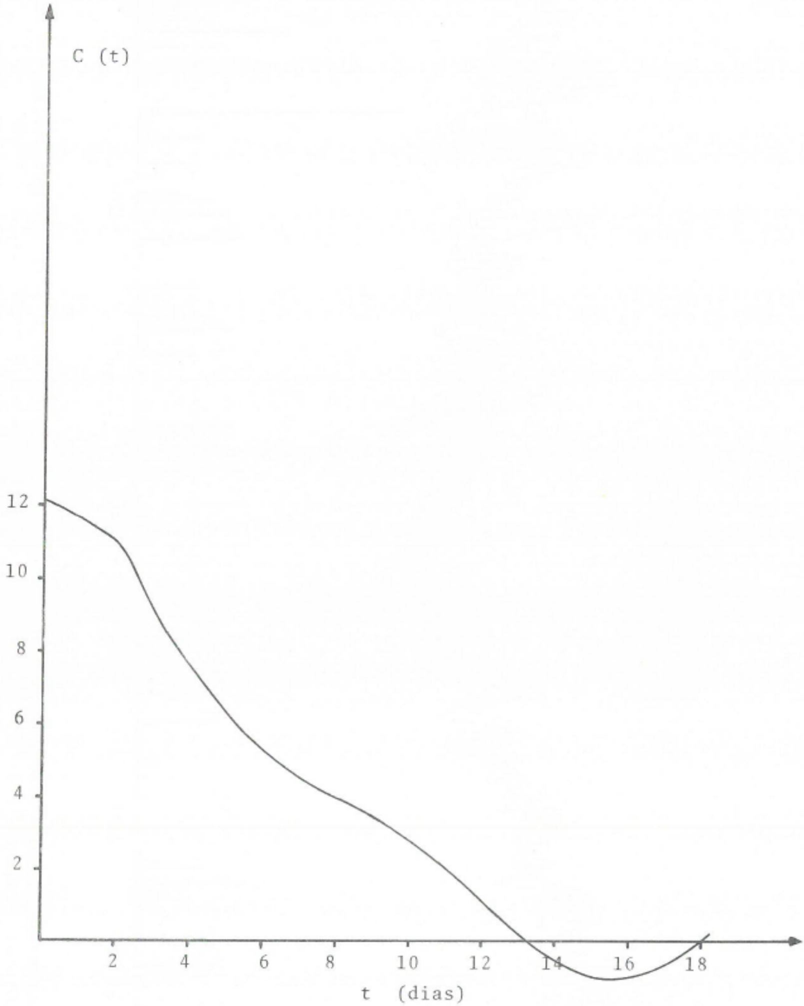

FIGURA 1 - Gráfico da função linearizadora C, definida na equação (50).

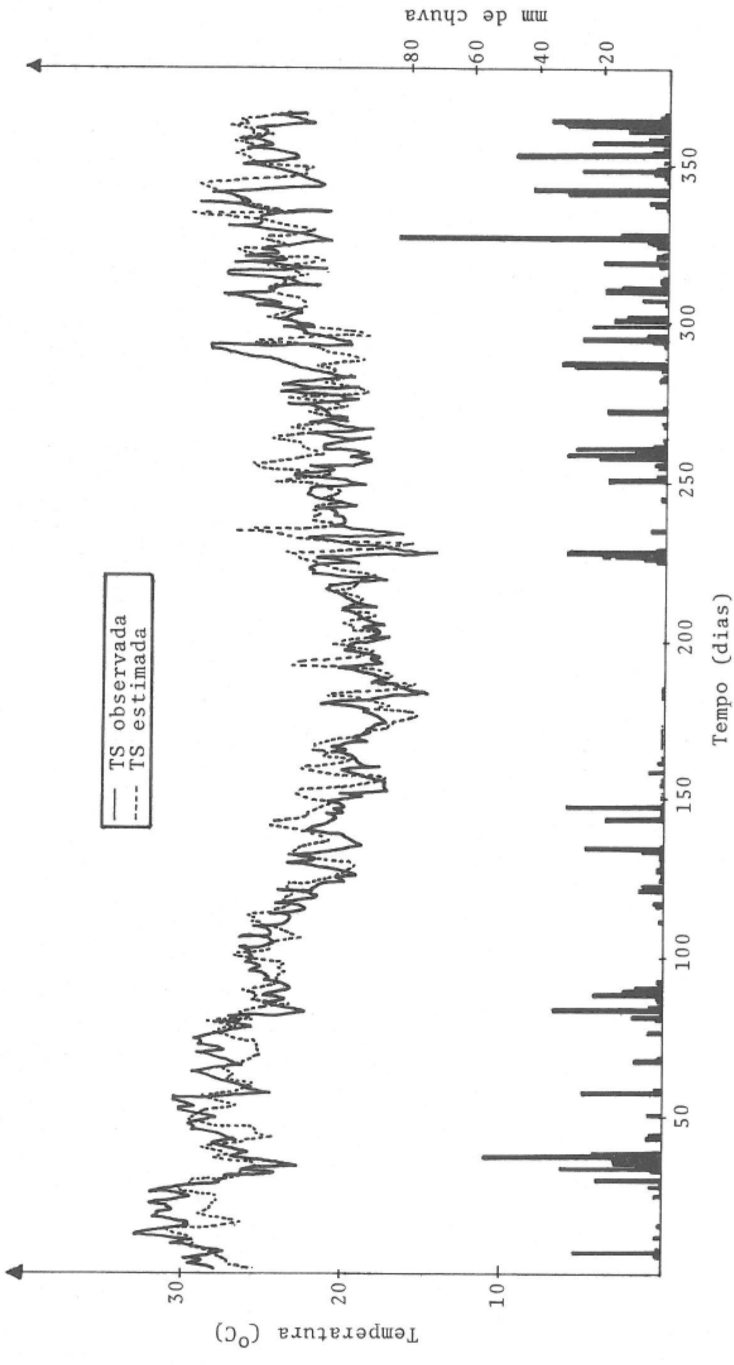

FIGURA 2 - Valores observados e estimados da temperatura do solo, a 2 cm de profundidade, usando-se as temperaturas do ar do mesmo dia, em 1976. Viçosa, MG.

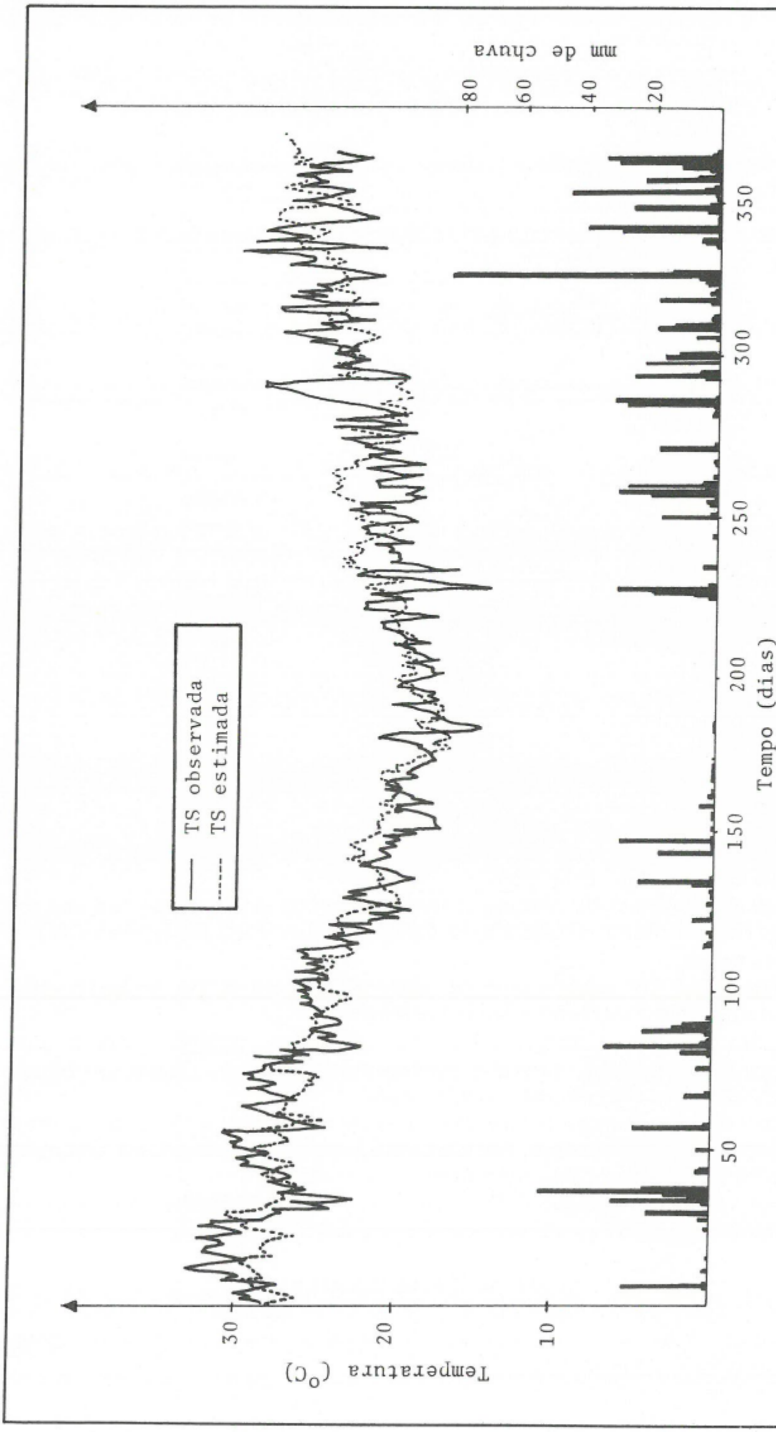

FIGURA 3 - Valores observados e estimados da temperatura do solo, a 2 cm de profundidade, usando-se as temperaturas do ar de 12 dias prévios, em 1976. Viçosa, MG.

QUADRO 3 - Desvios médios entre as temperaturas do solo, a 2 cm, estimadas e medidas, em 1976. Viçosa, MG

Período		mm de chuva	Desvios médios (°C)			Média (°C)
Em dias	Época		Com 0 dia	Com 6 dias	Com 12 dias	
001 a 365	01/01 a 31/12	1.271,5	2,40	2,52	2,44	2,45
091 a 120	01/04 a 30/04	4,6	1,60	1,60	1,56	1,58
110 a 170	20/04 a 19/06	97,5	1,96	1,92	1,82	1,90
335 a 365	01/12 a 31/12	266,3	2,30	3,20	2,98	2,82
290 a 350	17/10 a 16/12	390,0	2,81	3,23	3,11	3,05

6. SUMMARY

Daily mean air temperature (TA) and soil temperature taken at two centimeters depth (TS) over a period of five years (1971 to 1975), in Viçosa, MG, were used to generate a finite series of Fourier coefficients, calculated by numerical integration and rectangular rule. These coefficients were used to derive the coefficients of linearizing function C, which made possible the numerical integration of the equation:

$$TS(t_o) = \int_{t_o-p}^{t_o} C(t_o - s)TA(s)ds = C{*}TA \ ;$$

that is, the convolution of C and TA.

The values obtained from the above equation were multiplied by a constant determined for each day of the year.

From examination of function C, it was shown that for the same day and the 12 previous days, air temperature affects the estimation of soil temperature at two centimeters depth.

The estimated TS' were compared with the measured TS' using the 1976 observed data and the deviations were calculated.

The data for TA and TS, with now smoothing criteria, showed slow convergency in the respective Fourier coefficients. On the other hand, the figures clarified the detail of the periodicity of the data.

For days with no rainfall the estimated value of the TS' were more accurate than for days with precipitation. For days with some precipitation, the estimated TS' using TA's of the same day presented less deviation.

On rainy days the measured TS' were always lower than the estimated TS' because rainwater cools the soil surface more rapidly than the air.

7. LITERATURA CITADA

1. BROOKS, F.A. *An introduction to physical microclimatology.* Davis, University of California, 1957. 106 p.

2. CARSON, J.E. Analysis of soil and air temperatures by Fourier techniques. *Journal of Geophysical Research* 68(8):2217-2232. 1963.

3. CONRAD, Y. & POLLAK, L.W. *Methods in climatology*. 2nd ed. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1950. 459 p.

4. FIGUEIREDO, D.G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq. 1977. 274 p.

5. HASFURTHER, V.R. & BURMAN, R.D. Soil temperature modeling using air temperature as a driving mechanism. *Transactions of the ASAE, 17*(1):78-81. 1974.

6. HSU, H.P. *Análise de Fourier*. Tradução de Paulo Ivo de Queiroz. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 1972. 274 p.

7. KIRKHAM, D. & POWERS, W.L. *Advanced soil physics*. New York, Wiley Interscience, 1972. 534 p.

8. KREYSZIG, E. *Matemática superior*. Tradução de Carlos C. Oliveira. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1976, 122 p. (Vol. 3).

9. RAMANA RAO, T.V. & VIANELLO, R.L. *Características térmicas do solo de Cachoeira Paulista-SP*. INPE, 1977. 21 p. (Relatório INPE-1106-PE/080).

10. RUDIN, W. *Princípios de Análise Matemática*. Tradução de Eliana R. H. Brito. Rio de Janeiro, Livro Técnico e Editora UnB, 1971. 296 p.

11. SELLERS, W.D. *Physical climatology*. Chicago, The University of Chicago Press, 1972. 272 p.

12. SOKOLNIKOFF, I.S. & REDHEFFER, R.M. *Mathematics of physics and modern engineering*. 2nd ed. Los Angeles, International Student Edition, 1966. 752 p.

13. VIANELLO, R.L., RAMANA RAO, T.V. & NOGUEIRA, J.M. *Comportamento térmico do solo de Viçosa-MG*. Ciclo anual 1971. Universidade Federal de Juiz de Fora, 1977. 22 p.