Revista Ceres 33(187):226-241. 1986.

ANÁLISE DE EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS NO CASO EM QUE NEM TODOS OS TRATAMENTOS PRINCIPAIS POSSUEM TRATAMENTOS SECUNDÁRIOS [1]

Adair José Regazzi [2]
Humberto de Campos [3]

1. INTRODUÇÃO

Os experimentos em parcelas subdivididas são constituídos por dois tipos diferentes de tratamentos: nas parcelas, os tratamentos principais e, nas subparcelas, os tratamentos secundários. Tais experimentos têm grande utilidade na experimentação agropecuária, em razão, principalmente, da maior facilidade de instalação no campo, comparativamente ao esquema fatorial, apesar da redução no número de graus de liberdade, decorrente da presença de dois resíduos.

Segundo LEONARD e CLARK (*7*), os experimentos em parcelas subdivididas foram propostos por Yates, em 1933, e têm sido de grande valia para os estudiosos das mais diversas áreas de pesquisa. No tocante à pesquisa agropecuária, sua aplicação vem sendo ressaltada por autores consagrados, como STEEL e TORRIE (*13*), SNEDECOR e COCHRAN (*12*), COCHRAN e COX (*2*) e PIMENTEL GOMES (*9*), dentre outros.

Há situações em que o experimentador, por alguma razão, é levado a realizar um experimento em parcelas subdivididas em que nem todos os tratamentos principais (T) têm tratamentos secundários (T'). Na revisão bibliográfica não se encon-

---

[1] Parte da tese de doutorado do primeiro autor.

Aceito para publicação em 19-11-1985.

[2] Departamento de Matemática da UFV. 36570 Viçosa, MG.

[3] Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP. 13400 Piracicaba, SP.

trou nenhum trabalho que abordasse especificamente tal caso. Assim, propôs-se apresentar um estudo sobre esse tema, tendo como objetivos deduzir a análise de variância, justificando o teste «F», e obter as variâncias das funções lineares de interesse, úteis nos procedimentos para comparações múltiplas.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Segundo LEONARD e CLARK (*7*), os ensaios em parcelas subdivididas tiveram início com Yates, por volta de 1933, seguido de Le Clerg, em 1937, e Goulden, em 1939.

O esquema do experimento em parcelas subdivididas é apresentado, dentre outros, por KEMPTHORNE (*5*), ANDERSON e BANCROFT (*1*), STEEL e TORRIE (*13*) e COCHRAN e COX (*2*) como uma variação do experimento fatorial em T e T' tratamentos: os tratamentos T das parcelas são dispostos em qualquer tipo de delineamento, sendo mais usados os blocos casualizados e o quadrado latino, e os tratamentos T' das subparcelas são dispostos ao acaso dentro de cada parcela.

COCHRAN e COX (*2*) apresentam várias considerações sobre o experimento em parcelas subdivididas e mostram ser vantajoso o seu uso se os efeitos de T' e da interação T x T' forem de maior interesse que os efeitos de T. Afirmam ainda que o aumento da precisão de T' e da interação T x T' é obtido mediante a redução da precisão de T.

KEMPTHORNE (*5*) e FEDERER (*4*) apresentam fórmulas idênticas para calcular a eficiência dos ensaios em parcelas subdivididas, com relação aos ensaios em blocos casualizados.

CONDÉ (*3*) fez um estudo dos componentes de variância nos experimentos em parcelas subdivididas. O esquema da análise de variância, com as esperanças dos quadrados médios, está no Quadro 1.

Os resíduos apropriados para testar as hipóteses relativas aos tratamentos e interação são evidentes quando se observam as esperanças dos quadrados médios apresentadas no Quadro 1.

Segundo PIMENTEL GOMES (*9*) e LEAL (*6*), dentre outros, quando a interação T x T' é significativa, o esquema da análise de variância deve ser modificado, pois esse fato pode ser um indício de que os tratamentos secundários comportam-se de modo diferente em relação aos tratamentos principais. Assim, recomendam que seja estudado o efeito dos tratamentos secundários dentro de cada tratamento principal isoladamente.

No tocante à variância das funções lineares estimáveis, STEEL e TORRIE (*13*) apresentam resultados que podem ser resumidos conforme o Quadro 2.

No contraste $\hat{m}_{AB} - \hat{m}_{A'B}$, a variável observada tem distribuição aproximada de «t», com n' graus de liberdade. Nesse caso, n' é obtido pela aproximação proposta por SATTERTHWAITE (*10*), dada por

$$n' = \frac{[QMR(a) + (s-1)QMR(b)]^2}{\dfrac{[QMR(a)]^2}{n_a} + \dfrac{(s-1)^2\,[QMR(b)]^2}{n_b}}$$

sendo n_a e n_b os números de graus de liberdade dos resíduos a e b, respectivamente.

QUADRO 1 - Esquema da análise de variância, com as esperanças dos quadrados médios, de um experimento em parcelas subdivididas em blocos casualizados

Causas de variação	G. L.	Esperanças dos quadrados médios
Blocos	J-1	$\sigma^2 + K\sigma_\delta^2 + \frac{IK}{J-1} \sum_j b_j^2$
Tratamentos (T)	I-1	$\sigma^2 + K\sigma_\delta^2 + \frac{JK}{I-1} \sum_i t_i^2$
Resíduo (a)	(I-1) (J-1)	$\sigma^2 + K\sigma_\delta^2$
Tratamentos (T')	K-1	$\sigma^2 + \frac{IJ}{K-1} \sum_k t'^2_k$
Interação T x T'	(I-1) (K-1)	$\sigma^2 + \frac{J}{(I-1)(K-1)} \sum_{i,k} (tt')^2_{ik}$
Resíduo (b)	I(J-1) (K-1)	σ^2
Total	IJK-1	

QUADRO 2 - Comparação entre médias dos efeitos estimados e estimativas das variâncias

Comparação entre médias dos efeitos estimados	Estimativas das variâncias
$\hat{m}_A - \hat{m}_{A'}$	(2/sr) QMR(a)
$\hat{m}_B - \hat{m}_{B'}$	(2/pr) QMR(b)
$\hat{m}_{AB} - \hat{m}_{AB'}$	(2/r) QMR(b)
$\hat{m}_{AB} - \hat{m}_{A'B}$	(2/sr) [QMR(a) + (s-1) QMR(b)]

sendo

p = número de tratamentos principais;
s = número de tratamentos secundários;
r = número de repetições;
A e B = tratamentos principais e secundários, respectivamente.

3. METODOLOGIA E RESULTADOS

3.1. *Modelo Matemático*

Para a análise proposta, foram considerados, sem perda de generalidade, L tratamentos principais, e apenas os I primeiros (I < L) tinham tratamentos secundários.

Tomou-se, para esses ensaios, o seguinte modelo:

$$y_{ijk} = m + t_i + b_j + \delta_{ij} + t'_k + (tt')_{ik} + e_{ijk} \qquad (3.1.a)$$

com $i = 1, 2, ..., I, I+1, ..., L;$
$j = 1, 2, ..., J;$
$k = 1, 2, ..., n_{ij};$

sendo $n_{ij} = K$, para $i = 1, 2, ..., I$ e $n_{ij} = 1$, para $i=I+1, I+2, ..., L$; sendo $n = J(IK + L - I)$ o número total de observações.

Ademais, é necessário considerar que, na análise em questão, quando $n_{ij} = 1$, os (L-I)J valores do tipo y_{ij1}, para $i = I+1, I+2, ..., L$ e $j = 1, 2, ..., J$, são descritos pelo modelo (3.1.a), eliminando os efeitos t'_k e $(tt')_{ik}$, uma vez que os (L-I) tratamentos principais não têm tratamentos secundários.

Definindo agora os termos do modelo (3.1.a), tem-se: y_{ijk} é o valor observado da ik-ésima subparcela, no j-ésimo bloco; m é a média geral; t_i é o efeito do i-ésimo nível do tratamento principal, T; b_j é o efeito do j-ésimo bloco; δ_{ij} é o efeito residual das parcelas, caracterizado como componente do erro (a); t'_k é o efeito do k-ésimo nível do tratamento secundário, T'; $(tt')_{ik}$ é o efeito da interação do i-ésimo nível do tratamento T com o k-ésimo nível do tratamento T'; e_{ijk} é o efeito residual das subparcelas, caracterizado como componente do erro (b).

Sobre as distribuições das variáveis aleatórias δ_{ij} e e_{ijk}, foram feitas as seguintes pressuposições: $\delta_{ij} \sim NID(0, \sigma^2_\delta)$, $e_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2)$, δ_{ij} e e_{ijk} são não-correlacionadas.

Admitiu-se ainda que o modelo adotado incluísse as seguintes restrições nos parâmetros:

$$\sum_{i=1}^{L} n_{ij} t_i = \sum_{j=1}^{J} b_j = \sum_{k=1}^{K} t'_k = \sum_{i=1}^{I} (tt')_{ik} = \sum_{k=1}^{K} (tt')_{ik} = 0$$

Como parte do modelo, as mesmas restrições impostas aos parâmetros foram admitidas na solução.

3.2. *Equações Normais, Estimadores dos Parâmetros, Somas de Quadrados e Esperanças dos Quadrados Médios*

Para a aplicação do método dos mínimos quadrados, visando à obtenção do sistema de equações normais, estimadores dos parâmetros, partição da soma de quadrado total e número de graus de liberdade associado a cada fonte de variação, de acordo com o modelo (3.1.a), considerou-se apenas o erro e_{ijk} como aleatório.

3.2.1. *Equações Normais*

Tomando o modelo (3.1.a), na forma matricial,

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\epsilon}$$

e usando o método dos mínimos quadrados, obteve-se o sistema de equações normais

$$X'X\hat{\beta} = X'y,$$

sendo

X a matriz dos coeficientes dos parâmetros, com dimensão de (n) x (L + J + K + IK + LJ + 1);

$\hat{\beta}$ o vetor das soluções de mínimos quadrados, para os efeitos dos parâmetros, com dimensão de (L + J + K + IK + LJ + 1) x (1).

y o vetor dos valores observados, com dimensão de (n) x (1).

Desse modo, a matriz, X, foi partida de modo conveniente, resultando em

$$X = [\, j, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \,],$$

sendo j o vetor, composto de 1's referentes aos coeficientes da média geral, com dimensão de (n) x (1); X_2 a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos principais, com dimensão de (n) x (L); X_3 a matriz dos coeficientes associados aos blocos, com dimensão de (n) x (J); X_4 a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos secundários, com dimensão de (n) x (K); X_5 a matriz dos coeficientes associados às interações $(tt')_{ik}$, com dimensão de (n) x (IK); X_6 a matriz dos coeficientes associados às «interações» $(tb)_{ij}$, denotada por δ_{ij}, com dimensão de (n) x (LJ).

3.2.2. *Estimadores dos Parâmetros*

Sabe-se que esse sistema de equações normais é consistente e indeterminado. Porém, uma vez que as restrições admitidas nas soluções foram consideradas parte integrante do modelo, tem-se uma única solução, que será apresentada a seguir.

Adotou-se o procedimento proposto por PIMENTEL GOMES (8), tomando uma matriz, A, de restrição, de tal forma que

$$A\hat{\beta} = 0$$

sendo

$$A = \begin{bmatrix} & j'X_2 & j'X_3 & j'X_4 & j'X_5 & j'X_6 \\ & \phi & X_2'X_3 & X_2'X_4 & X_2'X_5 & X_2'X_6 \\ & X_3'X_2 & \phi & X_3'X_4 & X_3'X_5 & X_3'X_6 \\ 0 & \phi & X_4'X_3 & \phi & X_4'X_5 & X_4'X_6 \\ & \phi & X_5'X_3 & \phi & \phi & X_5'X_6 \\ & \phi & \phi & X_6'X_4 & X_6'X_5 & \phi \end{bmatrix}$$

(L+J+K+IK+LJ+1) (L+J+K+IK+LJ+1)

$\underset{\sim}{0}$ é um vetor nulo, com dimensão de $(L + J + K + IK + LJ + 1) \times 1$, e ϕ's são matrizes nulas.

Assim sendo:

$$X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{y}$$

$$A\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{0}$$

Efetuando a subtração, tem-se

$$(X'X - A)\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{y}$$

Fazendo $X'X - A = M$, sendo M tida como não-singular, tem-se que

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = M^{-1}X'\underset{\sim}{y}$$

De acordo com essa solução, os estimadores dos parâmetros são dados pelas expressões seguintes:

$$\hat{m} = \frac{G}{n}, \; G = \text{total geral observado}$$

$$\hat{t}_i = \frac{T_i}{JK} - \hat{m}, \text{ para } i = 1, 2, ..., I$$

$$\hat{t}_i = \frac{T_i}{J} - \hat{m}, \text{ para } i = I+1, I+2, ..., L$$

sendo T_i o total do i-ésimo tratamento principal;

$$\hat{b}_j = \frac{B_j}{(IK + L\text{-}1)} - \hat{m}$$

sendo B_j o total do j-ésimo bloco;

$$\hat{t}'_k = \frac{T'_k}{IJ} - \frac{\sum_{i=1}^{I} T_i}{IJK}$$

T'_k o total do k-ésimo tratamento secundário;

$$\widehat{(tt')}_{ik} = \frac{TT'_{ik}}{J} - \hat{m} - \hat{t}_i - \hat{t}'_k \text{ , para } i = 1, 2, ..., I$$

TT'_{ik} o total observado para a interação $(tt')_{ik}$.

Apenas para fins de cálculo, estimaram-se os efeitos δ_{ij} através das seguintes expressões:

$$\hat{\delta}_{ij} = \frac{P_{ij}}{K} - \hat{m} - \hat{t}_i - \hat{b}_j, \text{ para } i = 1, 2, ..., I$$

e

$\hat{\delta}_{ij} = P_{ij} - \hat{m} - \hat{t}_i - \hat{b}_j$, para i = I+1, I+2, ..., L, sendo P_{ij} o total observado para a «interação» δ_{ij}.

3.2.3. *Somas de Quadrados*

A partição da soma de quadrado total, para o modelo adotado, é dada por

SQTotal = SQBlocos + SQTratamentos T + SQResíduo(a) + SQTratamentos T' + SQInt. T x T' + SQResíduo(b).

Com a solução adotada e multiplicando cada estimador pelo segundo membro da respectiva equação normal, têm-se prontamente as somas de quadrados, decompostas de acordo com as causas de variação.

Desse modo, obtiveram-se:

$$C = \frac{G^2}{n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}\right)^2}{n}$$

$$\text{SQBlocos} = \frac{1}{IK+L-I} \sum_{j=1}^{J} B_j^2 - C$$

$$\text{SQTratamentos T} = \sum_{i=1}^{L} \frac{T_i^2}{n_{i.}} - C$$

$$\text{SQResíduo(a)} = \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \frac{P_{ij}^2}{n_{ij}} - C - \text{SQBlocos} - \text{SQTratamentos T}$$

sendo $\sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \frac{P_{ij}^2}{n_{ij}} - C = \text{SQ Parcelas}$

$$\text{SQTratamentos T'} = \frac{1}{IJ}\sum_{k=1}^{K} T'^{2}_{k} - C_1,$$

$$\text{sendo } C_1 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}\right)^2}{IJK}$$

$$\text{SQInt. T x T'} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} TT'^{2}_{ik} - C_1 -$$

$$- \left(\frac{1}{JK}\sum_{i=1}^{I} T^{2}_{i} - C_1\right) - \text{SQTratamentos T'}$$

SQResíduo(b) = SQTotal − SQParcelas − SQTratamentos T' − SQInt. T x T'

sendo

$$\text{SQTotal} = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y^2_{ijk} - C.$$

3.2.4. *Esperanças dos Quadrados Médios*

A partir do modelo adotado e das fórmulas que expressam as somas de quadrados, usando a notação de somatório, aplicou-se esperança matemática e obtiveram-se as esperanças dos quadrados médios, cujos resultados estão apresentados no Quadro 3.

Esses mesmos resultados podem ser obtidos a partir das formas quadráticas, que dão as somas de quadrados. Segundo SEARLE (*11*), a esperança matemática de uma forma quadrática, $\underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}$, é

$$E(\underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}) = E(\underset{\sim}{y}')\,QE\,(\underset{\sim}{y}) + tr(QV) \tag{3.2.4.a}$$

sendo Q o núcleo da forma quadrática, $V = var(\underset{\sim}{y})$ e *tr* o operador traço de uma matriz.

Com base nesse método, foi obtido um procedimento para a determinação das esperanças dos quadrados médios do modelo em questão, cujo desenvolvimento é mostrado a seguir.

Seja o modelo (3.1.a), na forma matricial:

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\epsilon} \tag{3.2.4.b}$$

QUADRO 3 - Esquema da análise de variância e esperanças dos quadrados médios

Causas de variação	Graus de liberdade	Somas de quadrados	Esperanças dos quadrados médios
Blocos	J-1	SQBlocos	$\sigma^2 + K_1\sigma_\delta^2 + f_1(\theta)$
Tratamentos T	L-1	SQTrat. T	$\sigma^2 + K_2\sigma_\delta^2 + f_2(\theta)$
Resíduo (a)	(J-1) (L-1)	SQR (a)	$\sigma^2 + K_2\sigma_\delta^2$
Parcela	LJ-1	soma	
Tratamentos(T')	K-1	SQTrat. T'	$\sigma^2 + f_3(\theta)$
Interação T x T'	(I-1) (K-1)	SQInt. T x T'	$\sigma^2 + f_4(\theta)$
Resíduo (b)	I(J-1) (K-1)	SQR (b)	σ^2
Total	IJK + (L-I)J-1	SQTotal	

sendo

$$K_1 = \frac{IK^2 + L - I}{IK + L - I}$$

$$K_2 = \frac{(IK + L - I)^2 - (IK^2 + L - I)}{(L - 1)(IK + L - I)}$$

$$f_1(\Theta) = \frac{(IK + L - I)}{(J - 1)} \sum_{j=1}^{J} b_j^2$$

$$f_2(\Theta) = \frac{1}{(L-1)} \sum_{i=1}^{L} n_i \, t_i^2$$

$$f_3(\Theta) = \frac{IJ}{(K-1)} \sum_{k=1}^{K} t'^2_k$$

$$f_4(\Theta) = \frac{J}{(I-1)(K-1)} \sum_{i,k=1}^{I,K} (tt')^2_{ik}$$

Seja a partição de $\underset{\sim}{\beta}$

$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\beta}_1 \\ -- \\ \underset{\sim}{\beta}_\delta \end{bmatrix} \qquad (3.2.4.c)$$

em que $\underset{\sim}{\beta}_1$ contém todos os componentes de efeito fixo do modelo (inclusive a média m) e $\underset{\sim}{\beta}_\delta$ representa o efeito aleatório, $\underset{\sim}{\delta}$.

O modelo (3.2.4.b) é escrito, em termos de (3.2.4.c), do seguinte modo:

$$\underset{\sim}{y} = X_1\underset{\sim}{\beta}_1 + X_\delta\underset{\sim}{\beta}_\delta + \underset{\sim}{\epsilon} \qquad (3.2.4.d)$$

sendo X partida convenientemente para o produto $X\underset{\sim}{\beta}$. Sendo assim,

$$X = [X_1 \,\vdots\, X_\delta]$$

X_δ correspondendo à matriz X_6 e X_1 à parte restante da partição feita em (3.2.1). Considerando as suposições feitas em (3.1), pode-se escrever

$$E(\underset{\sim}{y}) = X_1\underset{\sim}{\beta}_1 \qquad (3.2.4.e)$$

e

$$V = var(\underset{\sim}{y}) = X_\delta var(\underset{\sim}{\beta}_\delta)X'_\delta + \sigma^2 I_{(n)} \qquad (3.2.4.f)$$

sendo var ($\underset{\sim}{\beta}_\delta$) a matriz de covariâncias do efeito aleatório, δ. Esse efeito foi admitido como independente, com variância uniforme σ^2_δ. Assim,

$$var(\underset{\sim}{\beta}_\delta) = \sigma^2_\delta I_{(LJ)} \qquad (3.2.4.g)$$

Substituindo (3.2.4.g) em (3.2.4.f), obteve-se

$$V = X_\delta X'_\delta \sigma^2_\delta + \sigma^2 I_{(n)} \qquad (3.2.4.h)$$

De (3.2.4.e) e (3.2.4.h), o valor esperado da forma quadrática dada em (3.2.4.a) é

$$E(\underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}) = (X_1\underset{\sim}{\beta}_1)'QX_1\underset{\sim}{\beta}_1 + \sigma^2_\delta tr(QX_\delta X'_\delta) + \sigma^2 tr(Q) \qquad (3.2.4.i)$$

Desse modo, usando a expressão (3.2.4.i), chega-se também aos resultados das esperanças dos quadrados médios, apresentados no Quadro 3.

3.3. *Testes de Hipóteses e Quadros de Análise*

Nos ensaios em parcelas subdivididas, geralmente, há interesse em testar as três hipóteses básicas:

$H_0(1)$: $t_i = 0$; $i = 1, 2, ..., L$

$H_0(2)$: $t'_k = 0$; $k = 1, 2, ..., K$

$H_0(3)$: $(tt')_{ik} = i = 1, 2, ..., I$
$k = 1, 2, ..., K$,

que são as hipóteses de nulidade para efeitos de tratamentos secundários e da interação, respectivamente.

Com exceção do teste de blocos, os resíduos adequados para os testes das hipóteses básicas ficam evidentes quando se observa a coluna relativa às esperanças dos quadrados médios, apresentadas no Quadro 3.

Então, no tocante às três hipóteses básicas, o comportamento do experimento, segundo a análise proposta, foi análogo ao do experimento em parcelas subdivididas completo.

Se a hipótese $H_0(3)$ for rejeitada, $H_0(2)$ e $H_0(3)$, conjuntamente, deverão ser decompostas em I subipóteses, com o critério para os respectivos testes apresentados no Quadro 4.

sendo

$$SQT'/T_i = \frac{1}{J}\left[\sum_{k=1}^{K} y^2_{i.k} - \frac{(\sum_{k=1}^{K} y_{i.k})^2}{K}\right]$$

QUADRO 4 - Testes para as I subipóteses

Subipóteses	Graus de liberdade	F (observado)
$H'_c(1)$: $t'/t_1 = 0$	$(K-1)$; $[I(J-1)\ (K-1)]$	$(QMT'/T_1)/QMR$ (b)
$H'_c(2)$: $t'/t_2 = 0$	$(K-1)$; $[I(J-1)\ (K-1)]$	$(QMT'/T_2)/QMR$ (b)
...	...	...
$H'_o(I)$: $t'/t_I = 0$	$(K-1)$; $[I(J-1)\ (K-1)]$	$(QMT'/T_I)/QMR$ (b)

Se a hipótese $H_0(3)$ for rejeitada, caso haja interesse, as hipóteses $H_0(1)$ e $H_0(3)$, conjuntamente, poderão ser decompostas em K subipóteses, com o critério para os respectivos testes apresentados no Quadro 5.

QUADRO 5 - Testes para as K subipóteses

Subipóteses	Graus de liberdade	F (observado)
$H''_0(1): t/t'_1 = 0$	$(I-1); n''$	$(QMT/T'_1)/QMRes$
$H''_0(2): t/t'_2 = 0$	$(I-1); n''$	$(QMT/T'_2)/QMRes$
...	...	...
$H''_0(K): t/t'_K = 0$	$(I-1); n''$	$(QMT/T'_K)/QMRes$

sendo

$$SQT/T'_k = \frac{1}{J}\left[\sum_{i=1}^{I} y_{i.k}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{I} y_{i.k})^2}{I}\right]$$

$$QMRes = \frac{1}{K}\left[QMR_a(G_1) + (K-1)\, QMR(b)\right]$$

$QMR_a(G_1)$ refere-se ao quadrado médio do resíduo (a), desconsiderando na análise os (L-I) tratamentos principais, que não têm tratamentos secundários, e n" é o número de graus de liberdade, obtido pela aproximação proposta por SATTERTHWAITE (*10*) e dado por

$$n'' = \frac{[QMR_a(G_1) + (K-1)\, QMR\,(b)]^2}{\dfrac{[QMR_a(G_1)]^2}{(I-1)\,(J-1)} + \dfrac{[(K-1)\, QMR\,(b)]^2}{I(J-1)\,(K-1)}} \qquad (3.3.a)$$

O $QMR_a(G_1)$ pode ser interpretado, portanto, como um resíduo específico para o teste de tratamentos principais que têm tratamentos secundários.

3.4 *Variâncias das Funções Lineares Estimáveis*

Na aplicação de qualquer procedimento para comparações múltiplas, é necessário conhecer as variâncias das funções lineares estimáveis. Sendo assim, foram estudados quatro casos clássicos, geralmente de grande interesse, citados por PIMENTEL GOMES (*9*).

3.4.1. *Entre Efeitos Estimados de Dois Tratamentos Principais*

É interessante notar que, nesta análise, têm-se JK observações para um tratamento principal que tem tratamentos secundários e apenas J observações para os que não têm esses tratamentos. E, ainda, dos L tratamentos principais, somente I tratamentos interagem com os K tratamentos secundários.

Para a função $\hat{Y} = \hat{t}_i - \hat{t}_{i'} = \hat{m}_i - \hat{m}_{i'}$, obteve-se

$$V(\hat{Y}) = b_1\sigma^2 + b_2\sigma^2_\delta$$

sendo

$$b_1 = \frac{1}{n_{i.}} + \frac{1}{n_{i'.}} \text{ e } b_2 = \frac{\sum_{j=1}^{J} n^2_{ij}}{n^2_{i.}} + \frac{\sum_{j=1}^{J} n^2_{i'j}}{n^2_{i'.}}$$

Os componentes de variância, $\hat{\sigma}^2$ e σ^2_δ, podem ser estimados, com base no Quadro 3, do seguinte modo:

$$\hat{\sigma}^2 = QMR(b)$$

$$\hat{\sigma}^2_\delta = \frac{QMR(a) - QMR(b)}{K_2}$$

Assim, virá

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{1}{K_2}\left[b_2 QMR(a) + (b_1K_2 - b_2)\, QMR(b)\right]$$

O número de graus de liberdade, n*, associados a $\hat{V}(\hat{Y})$ é derivado da fórmula de SATTERTHWAITE (*10*) e dado por

$$n^* = \frac{[b_2 QMR(a) + (b_1K_2 - b_2)\, QMR(b)]^2}{\dfrac{[b_2 QMR(a)]^2}{n_a} + \dfrac{[(b_1K_2 - b_2)\, QMR(b)]^2}{n_b}}$$

em que n_a e n_b são os números de graus de liberdade dos resíduos a e b, respectivamente.

3.4.2. *Entre Efeitos Estimados de Dois Tratamentos Secundários*

Para a função $\hat{Y} = \hat{t}_k - \hat{t}_{k'} = \hat{m}_k - \hat{m}_{k'}$ obteve-se

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2}{IJ} \; QMR(b).$$

3.4.3. *Entre Efeitos Estimados de Dois Tratamentos Secundários dentro do i-ésimo Tratamento Principal*

Para a função $\hat{Y} = \hat{t}_{ik} - \hat{t}_{ik'} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{ik''}$, com $i = 1, 2, ..., I$, obteve-se

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2}{J} \; QMR(b)$$

3.4.4. *Entre Efeitos Estimados de Dois Tratamentos Principais dentro do k-ésimo Tratamento Secundário*

Para a função $\hat{Y} = \hat{t}_{ik} - \hat{t}_{i'k} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{i'k}$, com $i = 1, 2, ..., I$, obteve-se

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2}{JK}\left[QMR_a\,(G_1) + (K\text{-}1)\; QMR\;(b)\right]$$

O número de graus de liberdade, n'', associados à $\hat{V}(\hat{Y})$ é obtido através da expressão (3.3.a).

4. CONCLUSÕES

Com base nos resultados obtidos, concluiu-se:

— Os testes das três hipóteses básicas, isto é, as hipóteses de nulidade de efeitos de tratamentos principais (T), efeitos de tratamentos secundários (T') e efeitos de interação (T x T'), portaram-se do modo usual, no tocante aos resíduos apropriados.

5. RESUMO

Neste trabalho foi considerado o delineamento em blocos casualizados no esquema de parcelas subdivididas em que os tratamentos secundários não aparecem com todos os tratamentos principais. Desse modo, o modelo admitido foi o usual:

$y_{ijk} = m + t_i + b_j + \delta_{ij} + t'_k + (tt')_{ik} + e_{ijk}$,
com $i = 1, 2, ..., I+1, ..., L$; $j = 1, 2, ...J$;
$k = 1, 2, ..., n_{ij}$; sendo $n_{ij} = K$ para $i = 1, 2, ..., I$;
$n_{ij} = 1$ para $i = I+1, i+2, ..., L$.

No desenvolvimento da metodologia, supôs-se um ensaio com parcelas subdivididas no qual os L tratamentos principais foram dispostos em blocos casualizados. Trambém foi considerado, sem perda de generalidade, que os K tratamentos secundários estavam presentes apenas nos I primeiros tratamentos principais.

Nessas condições, foram determindos: equações normais, estimadores dos parâmetros, somas de quadrados, esperanças dos quadrados médios, critérios para os testes das hipóteses usuais e variâncias das funções lineares estimáveis.

Os testes das três hipóteses básicas, isto é, as hipóteses de nulidade de efeitos de tratamentos principais, efeitos de tratamentos secundários e efeitos de interação, deram os resultados usuais, com respeito aos resíduos apropriados.

6. SUMMARY

(SPLIT-PLOT ANALYSIS IN WHICH NOT ALL MAIN TREATMENTS HAVE SECONDARY TREATMENTS)

In this study, a randomized blocks design in the split-plot scheme is treated in situations in which sub-treatments do not appear with all the main treatments. For this purpose, the usual model was considered:

$$y_{ijk} = m + t_i + b_j + \delta_{ij} + t'_k + (tt')_{ik} + e_{ijk},$$

with $i = 1,2,..., I+1, ..., L$; $j = 1,2, ..., J$; $k = 1,2..., n_{ij}$; being $n_{ij} = K$ for $i = 1,2, ..., I$;

$$n_{ij} = 1 \text{ for } i = I+1, I+2, ..., L.$$

In the development of the methodology, a split-plot scheme in which the L treatments were arranged in random blocks was assumed. It was also considered, without loss of generality, that the K secondary treatments were present only in the first I main treatments.

Under these conditions, normal equations, parameter estimators, sums of squares, expected mean squares, criteria for testing usual hypotheses, and estimable linear function variances were determined.

The tests of the three basic hypotheses, i.e., the null hypotheses for the effects of main and secondary treatments, and for t and t' interaction, presented the usual results, with respect to the appropriate error mean square.

7. LITERATURA CITADA

1. ANDERSON, R.L. & BANCROFT, T.A. *Statistical theory in research*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1952. 399 p.

2. COCHRAN, W.G. & COX, G.M. *Diseños experimentales*. 3.ª ed. México, Trillas, 1976. 661 p.

3. CONDÉ, A.R. *Estudo dos componentes de variância nos experimentos em parcelas subdivididas*. Piracicaba, ESALQ/USP, 1974. 55 p. (Dissertação de Mestrado).

4. FEDERER, W.T. *Experimental design*. New York, McMillan Co., 1955. 544 p.

5. KEMPTHORNE, O. *The design and analysis of experiments*. New York, John Wiley and Sons, 1952. 631 p.

6. LEAL, M.L.S. *Análise de dados experimentais com medidas repetidas*. Brasília, Universidade Federal de Brasília, 1979. 99 p. (Dissertação de Mestrado).

7. LEONARD, W.H. & CLARK, A.G. *Field plot technique*. Minneapolis, Burgess, 1939. 288 p.

8. PIMENTEL GOMES, F. The solution of normal equations of experimental design models. *Ciência e Cultura*, *19*:567-573, 1967.

9. PIMENTEL GOMES, F. *Curso de Estatística Experimental*. 8.ª ed. Piracicaba, Livraria Nobel, 1978. 430 p.

10. SATTERTHWAITE, F.E. An approximate distribution of estimates of variance components. *Biometrics*, *2*:110-114, 1946.

11. SEARLE, S.R. *Linear models*. New York, John Wiley & Sons, 1971. 532 p.

12. SNEDECOR, G.W. & COCHRAN, W.G. *Statistical methods*. 6.ª ed. Ames, The Iowa State University Press, 1967. 593 p.

13. STEEL, R.G.D. & TORRIE, J.H. *Principles and procedures of statistics*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1960. 481 p.